# Шар и сфера

Шар состоит из точек, удаленных от данной точки (центра) не более чем на данное расстояние (радиус). Сфера — это граница шара. Поскольку расстояние от начала координат до точки $(x;\, y;\, z)$ равно $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то сфера радиуса $r$ с центром в начале координат задана уравнением

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

а шар — неравенством

$$x^2+y^2+z^2\le r^2.$$

---

Объем шара радиуса $r$ равен $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Зная это, легко найти площадь сферы. Для этого рассмотрим шар с тем же центром и радиусом $r+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Разность объемов равна

$$\frac{4}{3}\pi\left((r+\varepsilon)^3-r^3\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(3r^2\varepsilon+3r\varepsilon^2+\varepsilon^3\right).$$

Но тот же самый объем при маленьких $\varepsilon$ с довольно высокой точностью равен $\varepsilon S$, где $S$ — площадь сферы (по сути это определение площади поверхности). Значит,

$$S=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2=4\pi r^2.$$

Архимед доказал, что любые две плоскости, параллельные основаниям описанного около сферы цилиндра (рис.1), высекают на сфере и на цилиндре «пояски» одинаковой площади. (В частности, площадь всей сферы равна площади боковой поверхности цилиндра $2r\cdot 2\pi r=4\pi r^2$.)

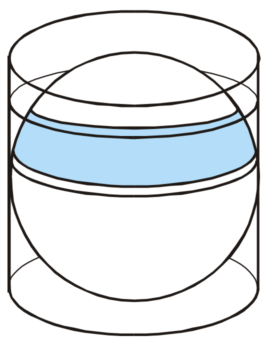

Рис. 1

---

Трехгранный угол с вершиной в центре сферы высекает на ней сферический треугольник (рис.2).

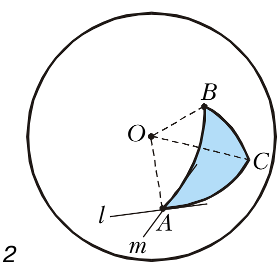


Рис. 2

Стороны сферического треугольника — дуги больших кругов. Поскольку касательные $l$ и $m$ к сфере перпендикулярны радиусу $OA$, то величины $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ углов сферического треугольника равны величинам соответствующих двугранных углов трехгранного угла.

«Двуугольник» $D_A$ (рис.3) составляет от площади сферы такую же часть, как угол $2\hat{A}$ от угла $2\pi$. Поэтому его площадь

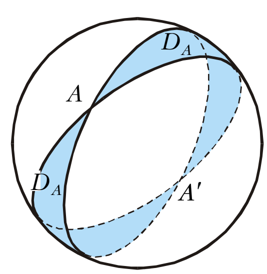


Рис. 3

равна

$$\frac{2\hat{A}}{2\pi}\cdot 4\pi r^2=4r^2\hat{A}.$$

Теперь продолжим стороны $AB$, $BC$ и $CA$ сферического треугольника до больших кругов (рис.4). Очевидно, двуугольники $D_A$, $D_B$ и $D_C$ покрывают сферический треугольник $ABC$ и симметричный ему треугольник $A'B'C'$ в три слоя, а остальную часть сферы — в один слой. Поэтому

$$4r^2\hat{A}+4r^2\hat{B}+4r^2\hat{C}=$$

$$=4\pi r^2+2S_{ABC}+2S_{A'B'C'},$$

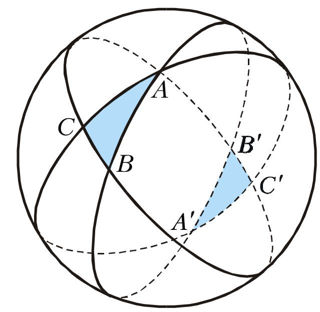


Рис. 4

где $S_{ABC}=S_{A'B'C'}$. Следовательно,

$$S_{ABC}=\left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\pi\right)r^2.$$

В частности, сумма углов любого сферического треугольника больше 180°.

---

В любой тетраэдр можно единственным способом вписать сферу, причем имеет место формула для объема тетраэдра $ABCD$:

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{ABC}+S_{ABD}+S_{ACD}+S_{BCD}\right)r,$$

где $r$ – радиус вписанной сферы. Существуют также 4 вневписанные сферы, каждая из которых касается одной грани тетраэдра и продолжений трех других граней, при этом

$$V=\frac{1}{3}\left(S_{ABC}+S_{ABD}+S_{ACD}-S_{BCD}\right)r_a,$$

где $r_a$ – радиус сферы, касающейся грани $BCD$ и продолжений трех других граней. Существуют ли еще сферы, которые касаются всех четырех плоскостей граней тетраэдра? Ответ зависит от площадей этих граней. Если существует сфера с центром $O$ и радиусом $\rho$, касающаяся «продолжений за ребро» граней $ABC$ и $ABD$ и «продолжений за вершины» $A$ и $B$ граней $ACD$ и $BCD$ (рис.5), то объем $V$ равен

$$V_{ACDO}+V_{BCDO}-V_{ABCO}-V_{ABDO}=$$

$$=\frac{1}{3}\rho\left(S_{ACD}+S_{BCD}-S_{ABC}-S_{ABD}\right).$$

Необходимым условием для этого