Ф1744. *В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр d, а половина – диаметр 2d. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?*

Содержимое сосуда очень напоминает «обычный» идеальный газ – для такого газа можно считать, что средние кинетические энергии тяжелых и легких «молекул» одинаковы. При этом скорости их движения различаются – шарики диаметром $2d$ имеют массу в 8 раз большую, поэтому их средние квадратичные скорости в $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ раза меньше. Площадь поперечного сечения у такого шарика в 4 раза больше, чем у маленького. Теперь можно оценить частоту ударов.

Пусть шарик летит со скоростью v в течение интервала времени Δt. Объем, в котором находятся «стукнутые» им шарики, пропорционален площади его поперечного сечения S, скорости движения и длительности интервала времени. (Изменения направления движения при ударах для нас несущественны – шарики располагаются в сосуде хаотически, и нам безразлично, где происходят удары. Правда, это справедливо, только если длина свободного пробега существенно больше размера шариков – иначе объем «заметаемого» пространства около точки удара было бы трудно посчитать.) При малой концентрации шариков числа ударов одинаковых шариков друг о друга пропорциональны «заметаемым» объемам, т.е. $Sv\Delta t$. Для больших шариков такой объем получается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем для маленьких: $S_{б} = 4S_{м}$, $v_{б} = v_{м}/\sqrt{8}$, поэтому большие шарики сталкиваются между собой чаще в $\sqrt{2}$ раз.

А.Зильберман

Ф1745. *В очень большом сосуде находится гелий при температуре T_0 = 1000 К и давлении p_0 = 0,1 Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом V = = 1 л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью S = = 1 мм^2, а через время τ = 0,01 с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.*

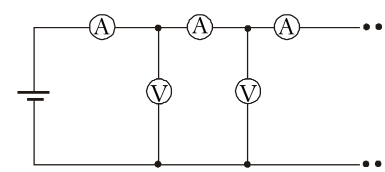
Для начала оценим длину свободного пробега молекул в большом сосуде. Концентрация молекул $n = p/(kT) \approx 10^{19}$ $1/\text{м}^3$ (оценки будем делать грубые – точные расчеты в этой задаче получаются плохо…). Принимая диаметр молекулы гелия равным $d = 2 \cdot 10^{-10}$ м, для длины свободного пробега получим $\lambda = 1/(\pi d^2 n) \approx 1$ м. При такой большой величине длины свободного пробега молекулы влетают в сосуд практически не соударяясь между собой, и работа окружающего газа над влетающими порциями отсутствует. Казалось бы, энергия молекул внутри сосуда должна быть равна среднему значению снаружи, однако доля быстрых молекул среди влетающих в сосуд заметно выше, чем снаружи, – быстрые молекулы за заданное время влетают в сосуд с бóльших расстояний, чем медленные. Расчет тут провести не просто – нужно учитывать долю молекул с определенными скоростями (распределение молекул по скоростям).

Можно сделать такую, например, грубую оценку: будем считать, что влетают в сосуд молекулы со средними энергиями, но быстрые молекулы их «подгоняют». Оценим давление только быстрых молекул как половину полного давления (строго говоря, их вклад выше, но доля быстрых молекул в общем числе невелика). Тогда «добавка» к средней энергии вошедшего в сосуд объема V молекул составит $0{,}5pV = 0{,}5\nu RT$, т.е. можно сказать, что энергия возрастет в $4/3$ раза. Это означает, что температура газа в сосуде окажется в это же число раз больше (самое забавное, что аккуратная оценка дает тот же результат!) и составит $T \approx 1333$ К.

Число влетевших молекул можно оценивать любым способом – через переданный импульс, просто кинематически и т.п., получится примерно 10^{14} молекул. При этом давление в сосуде окажется порядка 0,001 Па. Это существенно меньше давления снаружи, так что обратным потоком молекул из внутреннего сосуда наружу можно пренебречь.

Р.Александров

Ф1746. *К батарейке напряжением U = 1,5 В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров (см. рисунок). Каждый из амперметров имеет сопротивление r = 1 Ом, сопротивление каждого вольтметра R = 10 кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.*



Для начала находим обычным способом сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_{общ} = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR} = 100{,}5\ \text{Ом}.$$

Тогда ток первого амперметра равен

$$I_1 = \frac{U}{R_{общ}} = 14{,}9\ \text{мА}.$$

Первый амперметр с оставшейся частью схемы образует так называемый делитель напряжения: сопротивление «оставшейся» части составляет $R_{общ} - r = 99{,}5$ Ом, тогда после первого звена к остальной цепи будет приложено напряжение $U \cdot 99{,}5/100{,}5 = 0{,}99U$. Следовательно, второй амперметр покажет

$$I_2 = 0{,}99 I_1 = 14{,}8\ \text{мА}.$$

Сумму показаний всех амперметров можно найти совсем простым способом. Действительно, сумма напряжений амперметров равна напряжению батарейки, т.е. 1,5 В, ток амперметра определяется отношением его напряжения к его сопротивлению, тогда сумма токов равна

$$I_{общ} = \frac{1{,}5\ \text{В}}{1\ \text{Ом}} = 1{,}5\ \text{А}.$$

Сумму напряжений всех вольтметров можно найти таким