функция

$$f(x) = \sin x \cos^{\gamma} x - x,$$

где $\gamma = -\frac{1}{\beta} < 0$.

Изучим поведение $f(x)$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Далее, $f''(x) = -\sin x \cdot \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = (1+\gamma)^2 \cos^{\gamma} x - \gamma(\gamma - 1)\cos^{\gamma-2} x.$$

Заметим, что $\varphi(x)$ имеет на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ не более одного корня. Найдем знак функции $\varphi(x)$ в окрестности нуля. Функция $\varphi(x)$ положительна в некоторой окрестности точки 0, если

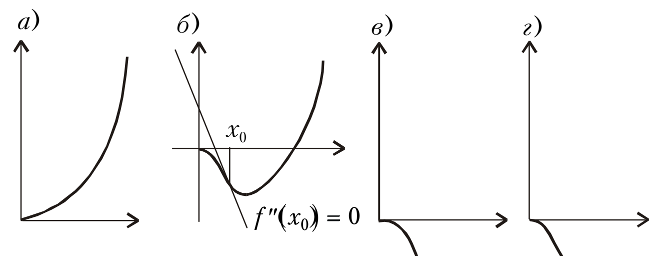
$$\gamma(\gamma - 1) < (1+\gamma)^2,$$

$$2\gamma + 1 > -\gamma,$$

$$1 > -3\gamma,\ \beta > 3.$$

Легко видеть, что при $0 < \beta \le 3$ на всем интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\varphi(x) < 0$.

Теперь мы знаем ход изменения функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале (рис. *а* и *б*). Тем самым утверждение задачи доказано.



$0 < \beta \le 3$ $\beta > 3$ $\beta \le -1$ $-1 < \beta < 0$

Замечание 1. На рисунках *в* и *г* изображены графики функции $f(x)$ при $\beta < 0$; полезно проследить за изменением вида этого графика при изменении числа β от 0 до $+\infty$, а затем от 0 до $-\infty$.

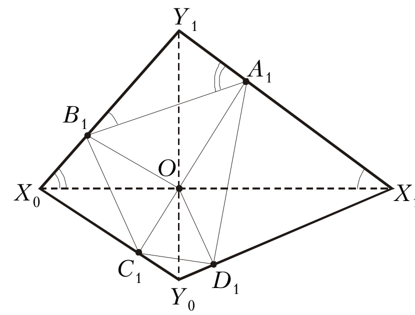
Замечание 2. На Всесоюзной студенческой олимпиаде 1977 года предлагалась такая задача: «Доказать неравенство $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$».

В.Сендеров

М1735*. *Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.*

Пусть три вершины многогранника X_0, Y_0 и Z_0 лежат на отрицательных полуосях, а три другие вершины X_1, Y_1 и Z_1 – на положительных полуосях, точка O – начало координат. Четыре проекции точки O лежат на гранях многогранника $Z_1X_1Y_1$, $Z_1Y_1X_0$, $Z_1X_0Y_0$ и $Z_1Y_0X_1$ – это точки A, B, C и D соответственно. Так как $\angle Z_1AO = \angle Z_1BO = \angle Z_1CO = \angle Z_1DO = 90°$, то сфера S, построенная на Z_1O как на диаметре, содержит точки A, B, C и D.

Докажем, что точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, т.е. сечению сферы S. Спроектировав эти точки из точки Z_1 на ребра многогранника X_1Y_1, Y_1X_0, X_0Y_0 и Y_0X_1, получим точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Эта проекция – стереографическая, и как только мы докажем, что A_1, B_1, C_1 и D_1 принадлежат одной окружности, так сразу убедимся, что точки A, B, C и D тоже принадлежат одной окружности.



Заметим, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 – это проекции точки O на стороны четырехугольника $X_1Y_1X_0Y_0$, диагонали которого X_1X_0 и Y_1Y_0 перпендикулярны и пересекаются в точке O (см. рисунок). В треугольнике $X_0Y_1X_1$ отрезок B_1A_1 антипараллелен стороне X_0X_1, т.е. $\angle Y_1B_1A_1 = \angle Y_1X_1X$, а $\angle Y_1A_1B_1 = \angle Y_1X_0X_1$; аналогичные равенства углов получим в треугольниках $Y_1X_0Y_0$, $X_0Y_0X_1$ и $Y_0X_1Y_1$. После этого простой подсчет покажет, что суммы противоположных углов в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ равны по 180°, т.е. около $A_1B_1C_1D_1$ можно описать окружность. Значит, точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, а четырехугольник $ABCD$ является одной из шести граней многогранника M, восемь вершин которого – это восемь проекций точки O на грани исходного многогранника. Все грани многогранника M (кубоида) являются четырехугольниками, около каждого из которых можно описать окружность. Рассмотрим сферу Q, содержащую две окружности, описанные около двух смежных граней многогранника M. Нетрудно убедиться, что сфера Q содержит все вершины многогранника M (имеет место частный случай задачи М456).

В.Произволов

Ф1743. *На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом 45° к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью 0,02 м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?*

В верхней точке траектории камня ускорение направлено перпендикулярно скорости камня и равно (как и в остальных точках траектории) ускорению свободного падения g. Тогда

$$g = \frac{(v_0 \cos 45°)^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{(v_0 \cos 45°)^2}{g}.$$

При уменьшении рисунка в 10 раз радиус кривизны траектории в любой ее точке становится в 10 раз меньше, ускорение жучка всюду перпендикулярно его скорости $\vec{u}$ (эта скорость не меняется по модулю), поэтому в интересующей нас точке траектории ускорение жучка равно

$$a = \frac{u^2}{r} = \frac{10u^2}{R} = \frac{10u^2 g}{(v_0 \cos 45°)^2} = 2 \cdot 10^{-4} \ \text{м/с}^2.$$

З.Рафаилов