M1731. *Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.*

Разобьем полученное число на 10 шестерок цифр. Второй может легко сделать так, чтобы в каждой шестерке первые три цифры совпадали с последними ($abcabc$). Полученное число будет делиться на 1001 и, следовательно, на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

M1732. *а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B, имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.*

б) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?*

а) Нужно доказать, что множества A и B равны или, как еще говорят, изометричны. Сначала отметим, что список расстояний между всевозможными парами точек из множества A, в котором $\frac{n(n+1)}{2}$ чисел, совпадает с подобным списком для множества B – это непосредственно вытекает из условия задачи. Отсюда можно заключить, что диаметры множеств A и B равны. Поэтому множества A и B можно разместить на одном отрезке I, концы которого принадлежат как A, так и B.

Теперь нужно доказать, что множества A и B либо совпали, либо симметричны относительно точки Q, которая является серединой отрезка I.

Рассмотрим возможное взаиморасположение точек множества A и множества B на отрезке I с концами α и β. Если точка $\gamma \in A$, то либо $\gamma \in B$, либо точка, симметричная точке γ относительно Q, принадлежит B, так как по условию для троеточия (α, β, γ) из множества A в множестве B имеется равное троеточие. Если две точки γ и δ, симметричные относительно Q, принадлежат множеству A, то обе они принадлежат и множеству B.

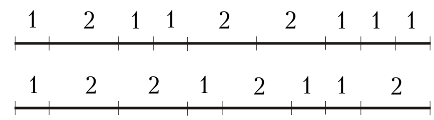
Обозначим $C = A \cup B$, в множестве C выделим максимальное подмножество C_1, симметричное относительно точки Q. Тогда $C = C_0 \cup C_1$. Заметим, что множество $A_1 = A - C$ и $B_1 = B - C$ не пересекаются и симметричны относительно точки Q. Если множество A_1 (а значит и B_1) пустое, то A совпадает с B. Если множество C_0 пустое, то A симметрично B относительно Q. Ввиду этого достаточно убедиться, что хотя бы одно из двух множеств C_0 и A_1 обязательно является пустым.

Допустим противное: ни C_0, ни A_1 пустыми не являются. Из определений этих множеств и проведенного анализа следует, что полный список (с учетом кратностей) расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая A_1, совпадает с полным списком расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая B_1 (обдумайте детально это умозаключение!).

Но максимальное расстояние между точками множества C_0 и точками множества A_1 не равно максимальному расстоянию между точками C_0 и точками B_1! Чтобы в этом удостовериться, каждое из названных множеств удобно и достаточно представить двумя точками: крайней левой и крайней правой. При этом нужно вспомнить, что A_1 и B_1 симметричны относительно точки Q, а C_0 – строго асимметрично относительно Q.

Значит, противоречие получено, и утверждение доказано.

б) Не сохранит. Приведем пример двух множеств A и B, каждое из которых состоит из 9 точек. При этом полный список расстояний между точками A (из 36 чисел) совпадает с аналогичным списком множества B, но эти множества не равны (не изометричны). Множество A задается словом $abaabbab$, множество B – словом $abbabaab$ (буква в слове – расстояние между соседними точками множества). При $a = 1$ и $b = 2$ множества A и B представлены на рисунке.



Остается открытым вопрос: изменится ли ответ этого пункта, если все расстояния в множестве A считать различными?

В.Произволов

M1733. *Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство*

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \frac{1}{2}.$$

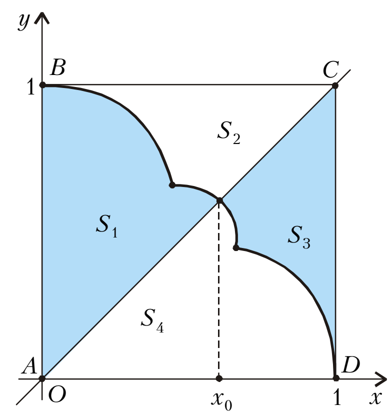


График функции $y = f(x)$ симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$ (см. рисунок). Значит, $S_1 = S_4$, а $S_2 = S_3$. Поэтому можно записать

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^{x_0} (f(x) - x)\,dx + \int_{x_0}^1 (x - f(x))\,dx =$$

$$= S_1 + S_3 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$

К.Каибханов

M1734. *Докажите, что уравнение* $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta = \cos x$ *на* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *не имеет решений при* $\beta \le 3$, *но имеет единственное решение при* $\beta > 3$.

Такие задачи обычно сводятся к исследованию функции с помощью производных. Трудность состоит в том, чтобы суметь удачно выбрать исследуемую функцию.

Исследование уравнения задачи мы начнем с очевидного замечания: при $\beta \le 0$ оно решений не имеет. В самом деле, поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$, то при $\beta \le 0$ на всем интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta \ge 1$.

Пусть $\beta > 0$. Заметим, что функция $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta - \cos x$ обращается в ноль в тех же точках интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что и