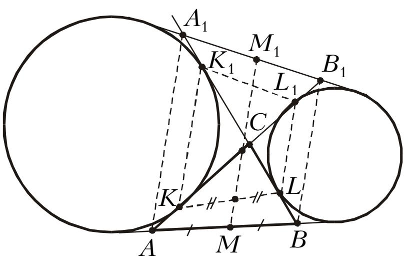
а) делит периметр треугольника ABC пополам;
б) параллельна биссектрисе угла ACB.

Достроим чертеж задачи до симметричного чертежа, и соображения симметрии помогут нам ее решить (см. рисунок).



Равнобочные трапеции AA_1B_1B и KK_1L_1L обладают тем свойством, что основание AA_1 параллельно основанию KK_1 и отстоит от него на то же расстояние, что и BB_1 от LL_1. Это следует из того известного факта (который легко перепроверить), что отрезки касательных AK и BL равны.

Теперь можно сказать, что средняя линия MM_1 трапеции AA_1B_1B является также средней линией трапеции KK_1L_1L. Чтобы завершить доказательство, осталось сделать два замечания. Первое: MM_1 делит диагональ AB_1 трапеции AA_1B_1B пополам, а половина этой диагонали равна полусумме сторон AC и BC треугольника ABC. Второе: MM_1 параллельна биссектрисе угла ACB.

Л.Емельянов

М1729. *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.*

Для удобства изложения будем считать числа одной части красными, а другой – синими.

Докажем, что любая пара чисел вида $(n, n + 2)$ одноцветна. Допустим противное: нашлось такое красное число n, что число $n + 2$ синее. Тогда возьмем синее число m $(m > n + 2)$ такое, что число $m + 1$ красное, а также синее число k $(k > m)$ такое, что число $k + 1$ красное. В этом случае тройка красных чисел $(n, m+1, k+1)$ в сумме дает красное число $n + m + k + 2$. Но тройка синих чисел $(n + 2, m, k)$ в сумме дает синее число $n + m + k + 2$; получено противоречие.

Теперь можно заключить, что все нечетные числа одноцветны, а также, что все четные числа одноцветны. Но все натуральные числа не являются одноцветными. Значит, нечетные числа имеют один цвет (например, красный), а четные – другой (например, синий).

Напоследок можно отметить, что в условии задачи слова «любая тройка чисел» правомерно заменить на слова «любые $2k+1$ чисел» – утверждение при этом останется в силе.

В.Произволов

М1730*. *Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.*

Проведем через точку D прямую l (сделайте чертеж самостоятельно), параллельную KM; пусть E и F – точки пересечения l с прямыми BC и BA соответственно. Пусть для определенности прямая, проходящая через O параллельно KM и l, пересекает стороны AB и CD четырехугольника. В этом случае для решения задачи надо доказать, что точка O лежит на медиане KL треугольника DKF. Мы докажем, что O – точка пересечения медиан KL и MN треугольников DKF и DME соответственно.

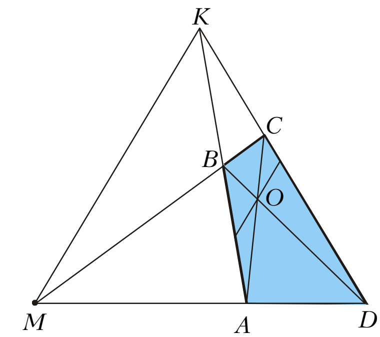


Рис.1

Обозначим точку пересечения медиан KL и MN через X. Докажем вначале, что X лежит на BD, т.е. что прямые DX и BD совпадают. Для этого докажем, что они делят отрезок KM в одном и том же отношении.

Пусть Y – точка пересечения DX и KM. Имеем: $KY/LD = XY/DX$ (поскольку треугольники XYK и XDL подобны), $MY/DN = XY/DX$. Поэтому $KY/MY = LD/DN$. Аналогично доказывается, что BD делит KM в отношении FD/DE. Но $FD = 2LD$, $DE = 2DN$.

Осталось доказать, что X лежит на отрезке AC. Другими словами, что KL и MN делят отрезок AC в одном и том же отношении.

Лемма 1. $VS/BV = AS/AC$, где S – точка на стороне AC треугольника ABC, V – точка пересечения прямой BS с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим точку T отрезка BC такую, что $ST \parallel AN$. Из теоремы Фалеса следует, что $VS/BV = NT/BN = NT/NC = AS/AC$.

Лемма 2. $VS/UV = (AS/AU)(AB/AC)$, где U и S – точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно, а V – точка пересечения прямой US с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. На стороне AC возьмем точку Z такую, что $UZ \parallel BC$. По лемме 1 имеем $VS/UV = AS/AZ$, а по теореме Фалеса $AC/AB = AZ/AU$. Осталось перемножить эти равенства.

Доказанные утверждения позволяют завершить решение задачи. Именно, по лемме 2 медиана KL делит отрезок AC (считая от C) в отношении $m = (CK/KD)(KF/AK)$, а медиана MN – в отношении $n = (MC/ME)(MD/MA)$. Но $MC/ME = KC/KD$, $KF/AK = MD/MA$. Следовательно, $m = n$.

Утверждение задачи доказано.

Замечание. Вот еще одно, более естественное, хотя и несколько более сложное, доказательство леммы 2. Проведем через V параллельные AS и AU прямые (рис.2). Имеем: $x/y = AC/AB$ (это – характеристическое свойство точек медианы!). Теорема Фалеса дает: $VS/y = US/AU$, $x/UV = AS/US$. Перемножая эти два равенства, получаем $VS/UV = (AS/AU)(y/x) = (AS/AU)(AB/AC)$. Лемма доказана.

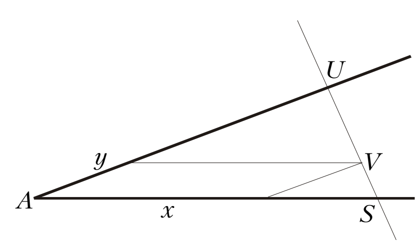


Рис.2

М.Волчкевич, В.Сендеров