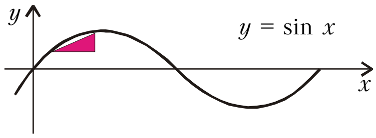


Рис.12

Первое впечатление (что вдвое), конечно, преувеличивает длину. Все же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20%. Причина в том, что бо́льшая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов.

Вот еще одно применение той же формулы. Реактивные струи первых реактивных двигателей, установленных на крыльях самолета вблизи фюзеляжа, представляли опасность для хвостового оперения. Конструкторы, знавшие и чувствовавшие обсуждаемую формулу, повернули

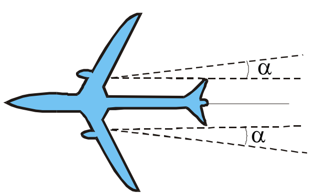


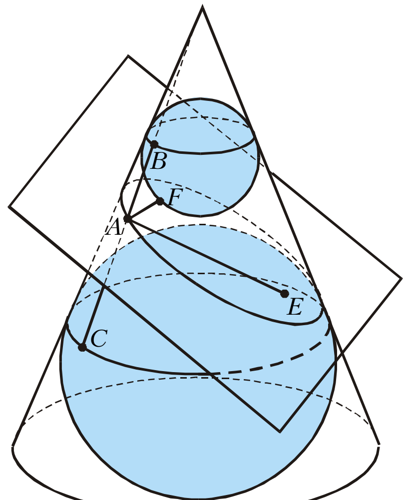
Рис.13

двигатели на небольшой угол α (рис.13).

Хвостовое оперение было спасено (отклонение струи пропорционально α), а результирующая сила тяги практически не изменилась (потеря $\approx \alpha^2/2$, где α – угол в радианах; для угла в 3° теряется всего порядка $1/800$ мощности)».

Впрочем, в XVII веке реактивной авиации еще не было. Вернемся к Кеплеру. Наш последний (и очень важный для астрономии и физики) пример имеет самое непосредственное отношение к открытым им законам движения планет. В только что процитированной статье Арнольда читаем: «Его учитель Тихо Браге в обсерватории «Ураниборг» в течение 20 лет скрупулезно измерял положения планет Солнечной системы. После смерти учителя Кеплер взялся за математическую обработку результатов этих наблюдений и обнаружил, что, например, траектория движения Марса – эллипс.

Эллипс – это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.



$FA + AE = BA + AC = BC$

Рис.14

Тот факт, что сечение конуса плоскостью, достаточно сильно наклоненной к его оси, является эллипсом, – замечательная геометрическая теорема, к сожалению, не доказываемая в школе. Доказательство ее очень просто (рис.14). Вписанные в конус и касающиеся плоскости (в фокусах E и F эллипса) сферы, на рассмотрении которых основано доказательство, называются сферами Данделена.

Чтобы понять рассуждения Кеплера, нам потребуются некоторые простые факты из геометрии эллипса.

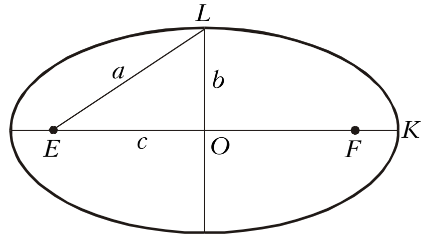


Рис.15

Длина большой полуоси эллипса OK (рис.15), обычно обозначаемая через a, равна длине гипотенузы EL треугольника с катетами $b = OL$ (малая полуось) и $c = EO$. Отношение c/a характеризует форму эллипса и называется эксцентриситетом, так как пропорционально смещению фокусов от центра эллипса. Эксцентриситет обычно обозначают буквой e.

По теореме Пифагора отношение длин полуосей эллипса есть

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}$$

при малых e».

Прервем цитату, чтобы пояснить эту формулу. Если вы знакомы с производными, то знаете, что производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ равна $1/\left(2\sqrt{x}\right)$, и можете подставить $x_0 = 1$ и $h = -e^2$ в формулу (*). А если не знакомы, то попросту возведите в квадрат:

$$\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 = 1 - e^2 + \frac{e^4}{4} \approx 1 - e^2.$$

Продолжим цитату: «Отсюда видно, что эллипс с малым эксцентриситетом практически неотличим от окружности. Например, если $e = 0{,}1$, то малая ось короче большой всего на $1/200$. Для эллипса с длиной большой оси 1 метр малая ось короче большой всего на полсантиметра, так что на глаз отличие такого эллипса от окружности вообще не заметно. Фокусы же смещены от центра на 5 см, что очень заметно...

Сначала Кеплер думал, что орбита Марса – окружность. Однако Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на $1/10$ часть радиуса. Но Кеплер не остановился на этом (уже замечательном) результате – потому что он знал теорию конических сечений. Кеплер знал, что эллипс с маленьким эксцентриситетом очень похож на окружность, и проверил, как ведет себя то небольшое отклонение орбиты от окружности, которое еще оставалось...

Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце, – примерно на полпроцента, т.е. на $e^2/2$. Так Кеплер пришел к мысли об эллиптических орбитах планет».

Как видите, разница между «чувствительным» и «нечувствительным» изменением существенна не только для австрийской бочкотары, но и для астрономии!

Ошибка, которую не сделал Кеплер

«Рукопись этой книги, – сказано в «Новой стереометрии...», – пролежала шестнадцать месяцев у аугсбургского книготорговца, и ... вопреки данному мне обещанию не была напечатана.

... С этого времени у меня явилось намерение напечатать эту книжку