$=0{,}000000001$. Эти две величины малы даже по сравнению с (тоже маленькой) величиной t.

А тот, кто изучал анализ, может обойтись и без замены переменной. По определению, для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеет место равенство

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

По определению предела имеем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\alpha(h),$$

где $\alpha(h)$ – бесконечно малая величина, т.е. $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$. Значит,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\alpha(h)\cdot h. \qquad (*)$$

(Последняя формула настолько важна, что в университетских курсах анализа именно ее берут за определение производной.)

Так что же мы видим? Если $f'(x_0)\neq 0$, то отклонение $f(x_0+h)$ от $f(x_0)$ при малых h почти пропорционально h (величина $\alpha(h)\cdot h$ при $h\to 0$ стремится к нулю быстрее, чем $f'(x_0)h$). Если же $f'(x_0)=0$, то отклонение равно $\alpha(h)\cdot h$ и стремится к нулю быстрее, чем h. Это значит, что вблизи точки, где производная равна 0, малое изменение аргумента функции сказывается на изменении функции существенно слабее (Кеплер говорит: «нечувствительно»), чем вблизи точки, где производная отлична от 0. Именно по этой причине небольшие отклонения австрийских бочек от стандарта практически не влияли на точность измерения их объема кубической линейкой.

Немного отвлекаясь от темы, заметим, что «нечувствительность изменения» функции вблизи точки, где производная обращается в ноль, является чрезвычайно важным математическим и даже общенаучным фактом. Например, кто из нас не клял нескончаемо длинные зимние ночи? И ведь как они начинаются, так несколько месяцев темень и темень. Ноябрь, декабрь, январь, февраль – короткий день и длинная ночь! Не то обидно, что 22 декабря день очень короток. Обидно, что так обстоит дело не только 22 декабря. Казалось бы, продолжительность дня должна меняться, а она целый месяц практически не меняется!

Но в свой срок приходит весна[10], продолжительность дня довольно быстро возрастает, и, к нашему удовольствию, долго, весь май и все лето, дни длинные, а ночи короткие. «Изменения нечувствительны» не только в точке минимума, но и в точке максимума!

В книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» американский физик Ричард Фейнман (1918–1988) рассказывает такую историю: «Когда я был в Массачусетсском технологическом институте, я любил подшучивать над людьми. Однажды в кабинете черчения какой-то шутник поднял лекало (кусок пластмассы для рисования гладких кривых – забавно выглядящая штука в завитушках) и спросил: «Имеют ли кривые на этих штуках какую-либо формулу?». Я немного подумал и ответил: «Несомненно. Это такие специальные кривые. Дайка я покажу тебе.– Я взял свое лекало и начал его медленно поворачивать. – Лекало сделано так, что, независимо от того, как ты его повернешь, в наинизшей точке каждой кривой касательная горизонтальна».

Все парни в кабинете начали крутить свои лекала под различными углами, подставляя карандаш к нижней точке и по-всякому прилаживая его. Несомненно, они обнаружили, что касательная горизонтальна. Все были крайне возбуждены от этого открытия, хотя уже много прошли по математике и даже «выучили», что производная (касательная) в минимуме (нижней точке) для любой кривой равна нулю (горизонтальна). Они не совмещали эти факты. Они не знали даже того, что они уже «знали».

Я плохо представляю, что происходит с людьми: они не учатся путем понимания. Они учатся каким-то другим способом – путем механического запоминания или как-то иначе. Их знания так хрупки!».

А вот еще пример: поведение синуса и косинуса вблизи нуля. Известное равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$$

(первый замечательный предел) означает, что при малых x (величина x, разумеется, измеряется в радианах, а не в градусах)

$$\sin x\approx x.$$

Производная функции $\cos x$ в точке $x=0$ равна нулю, поэтому $\cos x$ при малых отклонениях x от нуля «меняется нечувствительно». Точнее,

$$\cos x=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=$$

$$=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

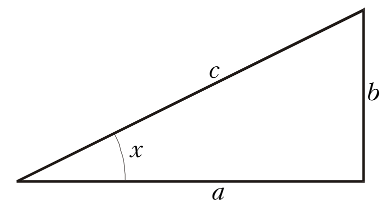

Рис.11

Другими словами, если мы рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис.11), где b мало по сравнению с c, то, обозначив буквой x величину угла, противоположного катету b, получим

$$x\approx\sin x=\frac{b}{c},$$

$$a=c\cos x\approx c\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right),$$

откуда

$$c-a\approx\frac{b^2}{2c}.$$

Как вы помните, катет b мал по сравнению с гипотенузой. Поэтому последняя формула означает, что катет a отличается от гипотенузы c на величину гораздо меньшую, чем b («нечувствительно», как сказал бы Кеплер).

В статье «Для чего мы изучаем математику?» («Квант» №1/2 за 1993 год) академик В.И.Арнольд в качестве примера важного общематематического факта, «которому, к сожалению, не учат в школе», привел именно последнюю полученную нами формулу. Он подробно разъяснил, что «больший катет вытянутого прямоугольного треугольника практически столь же длинен, как и гипотенуза», и формула дает хорошее приближение для разности их длин.

Дальше мы не будем пересказывать Арнольда, а процитируем: «Например, предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде (рис.12). Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо?

---

[10] *Производная становится отличной от нуля, сказал бы прозаик.*