венство $y < 2\big/\left(3\sqrt{3}\right)$ выполнено и в этом случае. Как видите, доказательство не очень сложное, но весьма искусственное – непонятно, как мы догадались до замены переменной. (А догадались мы очень просто – приравняли нулю производную!)

Третий, не менее искусственный, способ – воспользоваться неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.[8] Как известно, если a, b, c – неотрицательные числа, то

$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}.$$

Запишем это неравенство в виде

$$abc \le (a+b+c)^3/27$$

и положим $a = 2x$, $b = (1-x)\left(\sqrt{3}+1\right)$ и $c = (1+x)\left(\sqrt{3}-1\right)$. Тогда $a+b+c = 2\sqrt{3}$, и неравенство принимает вид

$$2x(1-x)\left(\sqrt{3}+1\right)(1+x)\left(\sqrt{3}-1\right) \le 8\big/\left(3\sqrt{3}\right),$$

откуда

$$x - x^3 \le 2\big/\left(3\sqrt{3}\right).$$

Четвертый способ, надеемся, понравится вам больше. В любой цилиндр можно вписать прямоугольный параллелепипед (рис.10), основание которого – квадрат со стороной длины $r\sqrt{2}$, а высота совпадает с высотой цилиндра. Объем такого параллелепипеда («столба», как его

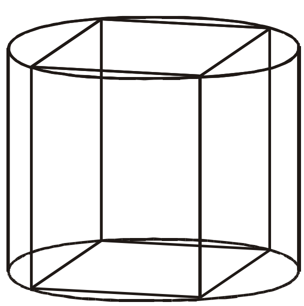

Рис.10

называет Кеплер) равен $2r^2h$, а объем цилиндра, как мы уже говорили,– $\pi r^2 h$. Таким образом, отношение объемов цилиндра и параллелепипеда равно $\pi/2$ и не зависит ни от r, ни от h. Значит, вместо цилиндра можно искать (вписанный в сферу диаметра d) прямоугольный параллелепипед максимального объема!

А теперь – слово Кеплеру: «Теорема IV. Из всех прямоугольных параллелепипедов ... с ... квадратными основаниями, вписанных в одну и ту же сферу, куб имеет наибольший объем». Кеплер, как вы уже знаете, не пользовался алгеброй, отчего его рассуждение растянулось на несколько страниц. Но мы-то с вами знаем неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

а также неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном [9]

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Если a, b, c – длины ребер прямоугольного параллелепипеда (заметьте – мы даже не требуем, чтобы основание было квадратом), вписанного в шар диаметра d, то

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

и, в силу выписанных выше неравенств,

$$abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \le$$

$$\le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Величина $\left(d/\sqrt{3}\right)^3$ – в точности объем куба, вписанного в сферу диаметра d.

Слава австрийским бочарам!

Как мы уже говорили, Кеплер рассуждал иначе, без алгебры. Но ответ у него получился тот же, что и у нас. И когда он получил ответ, то не смог сдержать своего восхищения австрийскими бочарами, которые «как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что ... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно... Бочары за длину клепки берут... полуторную величину диаметра основания, что ... дает... приближение к наивместительнейшей фигуре, потому что клепки изгибаются и с обеих сторон выходят за обручи, которые охватывают и сжимают днища, так что излишек в длине против полуторного диаметра основания и приходится на эти выступающие оконечности, которые не принимались во внимание по правилу теоремы V».

Скептик скажет, что для обоснования приближения $\sqrt{2} \approx 3/2$ столь глубокомысленные рассуждения излишни: довольно того, что запомнить число $3/2$ легче, чем 1,41421356237... Но поймите и Кеплера: он желал вызвать у читателя чувство уважения к науке (для этого он рассматривал даже бочки, полученные при вращении дуг эллипсов, гипербол, парабол, ...). И на жизнь он зарабатывал не математическими и даже не астрономическими занятиями, а выпуском календарей, содержащих предсказания всякого рода, и составлением гороскопов, т.е. предсказаний судьбы на основании расположения светил на небе. «Лучше издавать альманахи с предсказаниями,– писал Кеплер,– чем просить милостыню.» «Астрология – дочь астрономии, хотя и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду?»

А менее романтический и более проницательный читатель обратит внимание не на восторги, а на суть дела: «... по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». Что хотел сказать этим Кеплер?

«Убывание нечувствительно»

Тому, кто еще не знаком с математическим анализом, проще всего объяснить мысль Кеплера, если вспомнить формулу

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} - t^2\sqrt{3} - t^3.$$

При малых t величины $t^2\sqrt{3}$ и t^3 очень малы. Если, например, $t = 0{,}001$, то $t^2 = 0{,}000001$ и $t^3 =$

[8] *См., например, статьи Ю.Соловьева «Неравенство Коши» (Приложение к журналу «Квант» №4 за 1994 г.) и О. Ижболдина и Л.Курляндчика «Неравенство Иенсена» («Квант» № 4 за 2000 г.).*

[9] *Его легко доказать, возведя обе части в квадрат и сведя дело к неравенству* $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$.