$= \sum y_i t_i + c\sum t_i = \sum y_i t_i$).

Пусть число k таково, что $x_k \le 0$, $x_{k+1} > 0$. Тогда t_1, … …, $t_k \ge 0$, t_{k+1}, …, $t_n < 0$. Оценим сумму $\sum t_i y_i$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i y_i = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j y_j \le$$

$$\le y_k \sum_{i=1}^{k} t_i + y_{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} t_j < y_{k+1} \sum_{i=1}^{n} t_i = 0.$$

Неравенство доказано.

3. Пусть H – ортоцентр ΔABC, а M – середина стороны AC (рис.7). Выберем на отрезках AH и CH точки S и T такие, что $PS \perp AB$ и $TQ \perp BC$. Обозначим через K точку пересечения перпендикуляров PS и QT. Поскольку $\angle BPK = \angle BQK = 90°$, то четырехугольник $BPKQ$ вписанный. Покажем, что точки K и R совпадают. Треугольник PBQ равнобедренный ($BP = BQ$), ибо $\angle HPB = \angle HQB$. Поэтому точка K лежит на биссектрисе угла B. Докажем, что она также лежит и на прямой HM. Действительно, треугольники PHC_1 и QHA_1 подобны по двум углам, поэтому $\frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1}$. Аналогично, ΔAHC_1 подобен ΔCHA_1, откуда $\frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC}$. Далее, $\frac{PH}{HQ} = \frac{HS}{HT}$, ибо $\Delta PHS \sim \Delta THQ$. Следовательно,

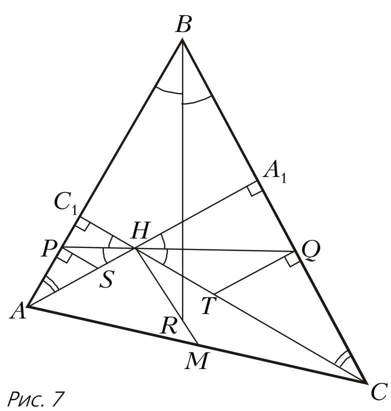

Рис. 7

$$\frac{HS}{HT} = \frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC},$$

откуда $ST \parallel AC$. Поэтому середина отрезка ST лежит на прямой HM. Поскольку $HSKT$ – параллелограмм, точка K лежит на прямой HM. Отсюда точка K является точкой пересечения прямой MH с биссектрисой угла B. Таким образом, точки K и R совпадают.

4. *Ответ*: нельзя. Пусть у нас есть гири A, B, C, D, E. Всего имеется $5! = 120$ различных способов упорядочивания масс этих гирь. А при условии $m(A) < m(B) < m(C)$ существует $\frac{5!}{3!} = 20$ различных способов упорядочивания масс. Поэтому если на какой-то вопрос получен отрицательный ответ, то этот вопрос может исключить не более 20 вариантов. Следовательно, первые пять вопросов могут исключить не более $20 \cdot 5 = 100$ вариантов. Каждый из следующих четырех вопросов может исключить не более половины из оставшихся вариантов. Т. е. после 6-го вопроса может остаться не менее 10 вариантов, после 7-го – не менее 5 вариантов, после 8-го – не менее 3, и, наконец, после 9-го вопроса может остаться по крайней мере 2 варианта. Таким образом, мы показали, что при любой последовательности из девяти задаваемых вопросов найдется последовательность ответов, которой удовлетворяют по крайней мере два варианта упорядочивания масс гирь.

5. *Ответ:* 7. *Пример*: {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}. *Указание.* Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, где $m \ge 8$, – множество из m чисел, удовлетворяющее условию задачи, причем $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$. Можно считать, что $a_4 > 0$ (если $a_4 \le 0$, то числа $-a_m$, $-a_{m-1}$, … $> -a_1$ также удовлетворяют условию). Докажите, что для одной из троек a_1, a_2, a_3 или a_1, a_2, a_4 сумма любых двух чисел множеству A не принадлежит.

6. Предположим, что совершенное число равно $3n$, где n не кратно 3. Тогда все натуральные делители числа $3n$ (включая его само) можно разбить на пары d и $3d$, где d не делится на 3. Следовательно, сумма всех делителей числа $3n$ (она равна $6n$) делится на 4. Отсюда n кратно 2. Далее заметим, что числа $\frac{3n}{2}$, n, $\frac{n}{2}$ и 1 будут различными делителями числа $3n$, их сумма равна $3n + 1 > 3n$, откуда следует, что число $3n$ не может быть совершенным. Противоречие.

7. Пусть точки Q и B_1 лежат по разные стороны от прямой BK, а точки P и B_1 лежат по разные стороны от прямой BM (остальные случаи рассматриваются аналогично). Прямые QK и PM (рис.8) пересекаются в точке N, так как точки Q и P являются образами точек K и M при гомотетии с центром N (касательная переходит в параллельную ей касательную с точкой касания в середине дуги). Значит, $\angle NQB + \angle NPB = \pi$. Кроме того, $\angle KB_1B + = \angle KQB = \pi$ и $\angle MB_1B + \angle MPB = = \pi$. Следовательно, $\angle KB_1B + \angle MB_1B = = \pi$, т. е. точка B_1 лежит на прямой KM. Далее, $\angle BQB_1 = = \angle BKB_1 = \angle KNM = = \angle B_1MB = \angle B_1PB$. А поскольку $\angle QBP + + \angle QNP = \pi$, то получаем, что в четырехугольнике BPB_1Q два противоположных угла равны, а сумма двух смежных равна π, следовательно, BPB_1Q – параллелограмм.

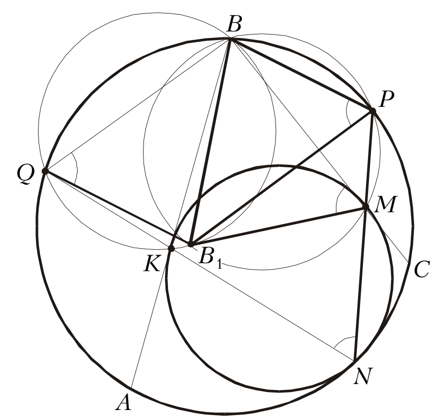

Рис. 8

11 класс

1. При $x = y = -z$, получаем $f(2x) \ge f(0)$.
С другой стороны, при $x = z = -y$ получаем, что $f(2x) \le f(0)$. Итак, $f(0) \ge f(2x) \ge f(0)$, т.е. $f(2x) \equiv \text{const}$. Функция $f(x) \equiv C$ при любом C удовлетворяет неравенству.

2. Предъявим такое разбиение. Выделим в i-е множество ($1 \le i \le 99$) все четные числа, дающие при делении на 99 остаток $i - 1$, а в сотое множество – все нечетные числа. Очевидно, что среди любых чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению $a + 99b = c$, четное количество нечетных. Если среди них два нечетных, то они из одного (сотого) множества, иначе a и c из одного множества, так как они четные и дают одинаковые остатки от деления на 99.

3. Будем говорить «в» вместо «внутри или на границе». Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник минимальной площади S, для которого не выполняется утверждение задачи (так как площадь любого пятиугольника с вершинами в целых точках – число полуцелое, то такой найдется). Покажем, что все целые точки в треугольнике AC_1D_1, кроме A, лежат на C_1D_1. В самом деле, если в нем есть другая целая точка K, то площадь выпуклого пятиугольника $KBCDE$ меньше S, а его «внутренний» пятиугольник лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, что, очевидно, невозможно.
Выберем из ABC, BCD, CDE, DEA и EAB треугольник наименьшей площади. Пусть это ABC. Тогда точка A лежит не дальше от прямой BC, чем D; точка C лежит не дальше от прямой AB, чем E. Рассмотрим точку O такую, что $ABCO$ –