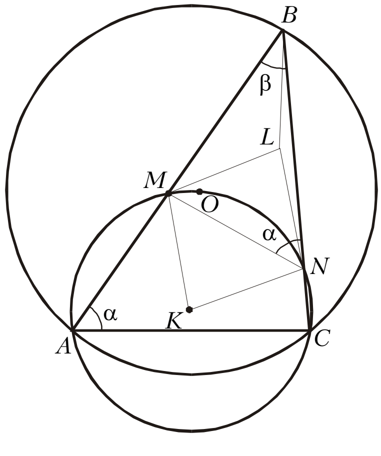

два, скажем a и $a + 64$, то Саша может спросить, чему равен наибольший общий делитель $X + 3 - r$ и 3, где r – остаток от деления a на 3. Ясно, что если $X = a$, то ответ: 3, а если $X = a + 64$, то 1. Итак, седьмым вопросом число X определится однозначно.

Замечание. Можно заметить, что первые шесть вопросов Саша употребил на отыскание последних шести цифр двоичной записи числа X.

Рис. 5

3. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ (рис.5). Тогда $\angle AOC = 2\beta$. Поэтому дуга AC окружности с центром K, не содержащая точек M и N, равна 4β. Далее, $\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{MN}\right)$, что дает $\beta = \frac{1}{2}\left(4\beta - \overset{\smile}{MN}\right)$. Тогда $\overset{\smile}{MN} = 2\beta$ и $\angle MKN = 2\beta$ (центральный угол). Из симметрии относительно MN получаем $\angle MLN = 2\beta$, $ML = LN$. Из этих равенств следует, что L – центр описанной окружности ΔMBN.

Так как $AMNC$ – вписанный четырехугольник, то $\angle BNM = \angle BAC = \alpha$. Для окружности, описанной около ΔMBN, $\angle BLN$ – центральный, поэтому $\angle BLM = 2\alpha$. Из ΔMBL получаем $\angle MBL = \angle BML = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поскольку $\angle ABL + \angle BAC = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $BL \perp AC$.

4. Для решения этой задачи удобно прибегнуть к языку теории графов (города – вершины графа, дороги — ребра, степень вершины – количество дорог, выходящих из города, цикл – замкнутый маршрут).

Предположим, что существует граф, степени всех вершин которого более двух, но длина любого цикла в этом графе делится на 3. Рассмотрим такой граф G с наименьшим числом вершин. Очевидно, в этом графе существует цикл Z; пусть этот цикл последовательно проходит по вершинам A_1, A_2, …, A_{3k}. Пусть существует путь S, соединяющий вершины A_m и A_n и не проходящий по ребрам цикла Z. Рассмотрим циклы Z_1 и Z_2, состоящие из пути S и двух «половинок» цикла Z. Поскольку длины обоих этих циклов делятся на 3, нетрудно заметить, что длина пути S делится на 3. В частности, из доказанного утверждения следует, что никакая вершина X, не входящая в цикл Z, не может быть соединена ребрами с двумя разными вершинами цикла Z. Кроме того, ребра, выходящие из вершин цикла Z, отличные от ребер этого цикла, все различны.

Объединим все вершины A_1, A_2, …, A_{3k} цикла Z в одну вершину A, которую соединим ребрами со всеми вершинами, соединеными с вершинами цикла Z. Очевидно, в полученном графе G_1 меньше вершин, чем в графе G, и степень каждой вершины по-прежнему более двух. Из доказанного выше следует, что длина любого цикла в графе G_1 делится на 3. Мы получили противоречие: ведь в выбранном ранее графе G было минимальное количество вершин среди всех таких графов.

Таким образом, в любом графе, степени всех вершин которого более двух, существует цикл, длина которого не делится на 3. Остается лишь применить это утверждение для графа, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам.

5. *Указание.* Докажите по индукции, что при $n = 5m$ все числа от 1 до n окажутся выписанными. Для этого запишите первые 5 членов последовательности, а затем убедитесь, что $a_{5m} = 5m - 2$, а следующие 5 чисел имеют вид: $5m + 1$, $5m + 4$, $5m + 2$, $5m + 5$, $5m + 3$. Далее воспользуйтесь тем, что квадраты натуральных чисел дают при делении на 5 остатки 0, 1 и 4.

7. Пусть окружность S_1 вторично пересекает CD в точке F (рис.6). Будем считать для определенности, что E лежит между D и F (возможно, $F = E$). Из равенства $DA^2 = DF \cdot DE$ следует $DB^2 = DF \cdot DE$, а значит, и окружность S_2 проходит через точку F. Теперь, поскольку $CA \cdot CM = CE \cdot CF = CB \cdot CN$, получаем $\frac{CM}{CN} = \frac{CB}{CA}$, откуда $\Delta CMN \sim \Delta CBA$, $\angle CMN = \angle CBA$, $\angle CNM = \angle CAB$. Проведем касательную к S_1 в точке M и отметим на ней две точки P и Q так, чтобы P оказалось по одну сторону с B от прямой AC, а Q – по другую. Очевидно, $\angle PMA = \angle BAM$. Но тогда $\angle QMC = \angle PMA = \angle CAB = \angle CNM$, а это означает, что окружность, проходящая через C и M и касающаяся S_1, проходит и через N. Аналогично показывается, что окружность, проходящая через C и N и касающаяся S_2, проходит и через M.

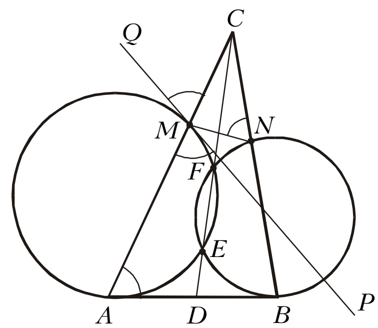

Рис. 6

8. Положим для удобства изложения $a_{n+100} = a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, 100$. Через (a, b) будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b.

Лемма. *Пусть a_1, a_2, …, a_n и d – натуральные числа. Тогда существует натуральное число k такое, что $(a_1 + kd, a_i) \le d$ для любого $i = 2, 3, \ldots, n$.*

Доказательство леммы. Существует некоторое число, кратное $a_2 a_3 \ldots a_n$, скажем $la_2 a_3 \ldots a_n$, которое больше a_1. Тогда среди тех k, для которых $a_1 + kd > la_2 a_3 \ldots a_n$, существует наименьшее число k_0. Положим $a_1' = a_1 + k_0 d$. Тогда $0 < a_1' - la_2 a_3 \ldots a_n \le d$, и наибольший общий делитель a_1' и каждого из a_i не превосходит d. Лемма доказана.

Пусть теперь M – наибольший из попарных общих делителей чисел a_i. Докажем, что с помощью операций, описанных в условии, мы сможем заменить исходный набор чисел на набор, в котором все попарные общие делители меньше M. Действительно, так как числа a_1, a_2, …, a_{100} взаимно просты в совокупности, найдутся два соседних числа a_i и a_{i+1}, первое из которых делится на M, а второе – нет. Тогда $d = (a_i, a_{i+1}) < M$. Применяя лемму, прибавим к a_i такое кратное d, чтобы наибольшие общие делители a_i' с каждым из остальных чисел стали не больше d. В полученном наборе по-прежнему все попарные наибольшие делители не превосходят M, а чисел, кратных M, меньше, чем в исходном. Повторяя при необходимости эту операцию, мы добьемся, что останется ровно одно число, кратное M, и тогда, очевидно, все попарные наибольшие общие делители станут меньше M.

Итак, если наибольший из попарных общих делителей чисел набора больше 1, его можно уменьшить. Поэтому его можно уменьшить до 1, что и требуется условием.

10 класс

2. Пусть $t_i = x_i^{13} - x_i$. При $-1 < x_i \le 0$ имеем $t_i \ge 0$; если же $0 < x_i < 1$, то $t_i < 0$. Неравенство, которое нужно доказать, перепишем в виде $\sum_{i=1}^{n} t_i y_i < 0$. Без ограничения общности можно считать, что $y_1 > 0$ (поскольку $\sum\left(y_i + c\right)t_i =$