«опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом. Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».
Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура проведена описанная процедура и это условие выполнялось. Покажем, что и после очередного тура такой процедуры оно будет выполнено.
Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры при описанной жеребьевке выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Этим и доказан искомый факт.
**В.** Добавим к «настоящим» игрокам некоторое количество «статистов», чтобы общее число участников стало степенью двойки. Пусть эти «статисты» проигрывают всем остальным участникам, а между собой играют как угодно. Очевидно, чемпион останется чемпионом, и можно использовать жеребьевки из пунктов А и Б. При этом можно обеспечить, чтобы «статисты» все время играли между собой – кроме одного, если в данном туре их число нечетно (тогда нечетно и число «настоящих» игроков). Удалим теперь «статистов», и пусть «настоящий» игрок, встречавшийся со «статистом» в каком-то туре, пропускает этот тур и выходит в следующий. Мы получим искомую жеребьевку.

## Дробно-рациональные уравнения с параметром

**1.** $x_1 = 2a-3$, $x_2 = 1-a$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac12; 1; \frac43; 2; 3\right\}$; $x=-2$ при $a \in \left\{\frac12; 3\right\}$; $x=-1$ при $a \in \{1; 2\}$; $x = -\frac13$ при $a = \frac43$.

**2.** $x_1 = 2a-1$, $x_2 = 3$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-3; \frac13; \frac32; 2\right\}$; $x=-7$ при $a=-3$; $x=3$ при $a \in \left\{\frac13; \frac32; 2\right\}$.

**3.** $x_1 = a$, $x_2 = 2a-1$, $x_3 = (a+1)/2$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-1; -\frac13; 0; \frac13; 1; 5\right\}$; $x_1=-1$, $x_2=0$ при $a=-1$; $x_1 = -\frac53$, $x_2 = -\frac13$ при $a = -\frac13$; $x_1=-1$, $x_2=\frac12$ при $a=0$; $x_1 = \frac13$, $x_2 = \frac23$ при $a = \frac13$; $x=1$ при $a=1$; $x_1=5$, $x_2=9$ при $a=5$.

**6.** $x_1 = -\frac{7}{a+1}$, $x_2 = \frac{6}{1-a}$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-8; -5; -1; \frac17; 1; \frac52; 13\right\}$; $x = \frac23$ при $a=-8$; $x = \frac74$ при $a=-5$; $x=3$ при $a=-1$; $x=-\frac72$ при $a=1$; $x=-4$ при $a=\frac52$; $x=-\frac12$ при $a=13$.

**7.** При $a \in \left(-\infty; -\frac{14}{11}\right) \cup \{-1\} \cup (2; +\infty)$ решений нет; $x_{1,2} = \frac{a+4 \pm \sqrt{-(a-2)(11a+14)}}{2\left(1-a^2\right)}$ при $a \in \left(-\frac25; \frac15\right) \cup \left(\frac15; 1\right) \cup (1; 2)$; $x = -\frac{11}{5}$ при $a = -\frac{14}{11}$; $x = -\frac57$ при $a = -\frac25$; $x = -\frac58$ при $a = \frac15$; $x = -\frac35$ при $a=1$; $x=-1$ при $a=2$.

**8.** К случаям, рассмотренным в задаче 5 статьи, добавляется случай равенства нулю коэффициента перед $x^2$. Ответ показан на рисунке 4.

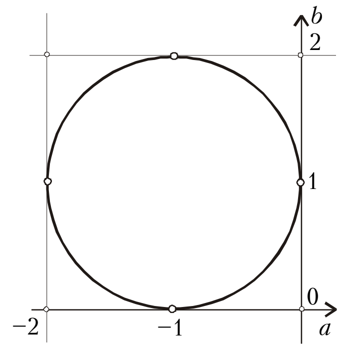

*Рис. 4*

## Конденсаторы в цепях постоянного тока

**1.** $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$.

**2.** 1) $\mathcal{E} = 4U_1/3 = 16$ В; 2) $U_2 = 5\mathcal{E}/16 = 5$ В.

**3.** 1) $I_2 = \mathcal{E}/R_2 = 1{,}5$ А;

2) $I_6 = \mathcal{E}\left(R_1+R_2\right)/\left(R_1R_2\right) - I_3R_3/R_2 = 4{,}05$ А.

**4.** 1) $I_{06} = \mathcal{E}/r$; 2) $Q = \left(C_1+C_2+C_3\right)\mathcal{E}^2/2$.

## XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

### *Заключительный этап*

### *9 класс*

**1.** *Ответ*: $a+b+c=-3$. *Указание.* Пусть $x_1$ – общий корень первой пары уравнений, а $x_2$ – общий корень второй пары уравнений. Докажите, что $x_1x_2 = 1$, а потому $x_2$ – общий корень уравнений $x^2+x+a=0$ и $x^2+cx+1=0$.
**2.** Сначала Саша узнает НОД чисел $X+1$ и 2 и тем самым определяет четность числа $X$. Если $X$ четно, то второй вопрос будет о НОД$(X+2, 4)$, а если нечетно, то о НОД$(X+1, 4)$, после чего Саша узнает остаток от деления $X$ на 4. Вообще, если после $k$ вопросов ($k \le 5$) Саша определит остаток $r_k$ от деления $X$ на $2^k$, то следующим $(k+1)$-м вопросом он узнает $A = $ НОД$\left(X+2^k-r_k, 2^{k+1}\right)$, а затем найдет и остаток от деления $X$ на $2^{k+1}$: если $A = 2^{k+1}$, то $r_{k+1} = 2^k + r_k$, если же $A = 2^k$, то $r_{k+1} = r_k$.
Таким образом, задав 6 вопросов, Саша узнает остаток от деления $X$ на 64. Ясно, что чисел с таким остатком при делении на 64 в пределах первой сотни не более 2. Если их все же