4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 – прямые DM и DN, пересекающие S_1 в

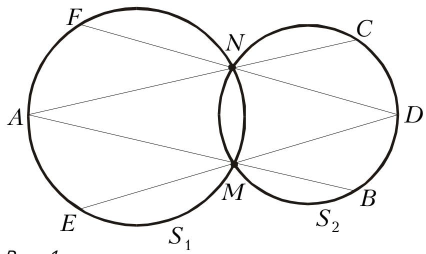

Рис. 1

точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C – по другую (рис.1). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.

М.Сонкин, Д.Терешин

5. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рисунке 2. Докажите, что

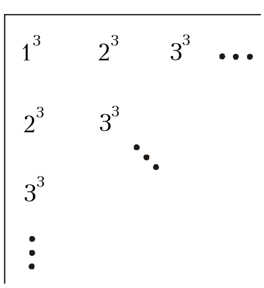

Рис. 2

сумма всех чисел в таблице делится на 200.

Л.Емельянов

6. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина – алюминиевые массой 10 г, а остальные – дюралевые массой 9,9 г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них – одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

С.Токарев

7. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N (M, $N \neq C$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

М.Сонкин

8. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.

Р.Садыков, Е.Черепанов

10 класс

1. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

В.Произволов, В.Сендеров

2. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

Л.Емельянов

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

С.Берлов

4. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

В.Замятин

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и для всех x, $y \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$\left|f(x+y) + \sin x + \sin y\right| < 2?$$

Е.Знак

6. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при всех нечетных $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

А.Храбров

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N. Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB, из L на BC, из M на CD, пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

П.Кожевников

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины (т.е. состоящих из нечетного числа дорог). Докажите, что страну можно разделить на $2N + 2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

В.Дольников, Д.Карпов

11 класс

1. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа a_1, a_2, …, a_{10}, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{10}) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

Н.Агаханов

2. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

И.Рубанов

3. Последовательность a_1, a_2, … …, a_{2000} действительных чисел такова, что для любого натурального n, $1 \le n \le 2000$, выполняется равенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2.$$

Докажите, что все члены этой последовательности – целые числа.

С.Тухвебер

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Для неотрицательных чисел x и y, не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

А.Храбров

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность – также с центром O – пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F – ее точки пересечения со сторонами AB и BC соответственно, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 – точки ее пересечения со стороной AC, B_1 – ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

М.Сонкин

7. Даны числа 1, 2, …, N, каждое из которых окрашено либо в черный,