$=-1$; $x=\frac{7}{33}$ при $a=-\frac{4}{7}$; $x=\frac{1}{8}$ при $a=1$; $x=\frac{1}{15}$ при $a=4$.

Прием, использованный при решении задачи 3, очень важен и находит широкое применение в других задачах с параметрами. С его помощью можно решить и первые две задачи (попробуйте!). Попытаемся его осмыслить.

Дано уравнение $f(x,a)=0$ и ограничение $g(x,a)\neq 0$. Способ, которым мы решили первые две задачи, состоит в следующем. Находим для уравнения $f(x,a)=0$ корни $x=p_1(a),\ldots,x=p_n(a)$. Решаем уравнения $g(p_i(a),a)=0$ и находим множество A_i «запрещенных» значений параметра a. Вычисляем значения остальных корней на запрещенных значениях для одного из корней (если только эти значения не являются запрещенными и для других корней). И так перебираем все корни.

А вот способ, которым мы решили задачу 3. Решаем уравнение $g(x,a)=0$ и находим его корни $x=r_k(a)$. Решаем уравнение $f(r_k(a),a)=0$ и находим значения a_{km}. Для уравнения $f(x,a_{km})=0$ корень $x=r_k(a_{km})$ является запрещенным, так как он обращает в ноль функцию $g(x,a)$. Нужно найти остальные корни уравнения $f(x,a_{km})=0$ и выяснить, не являются ли они запрещенными.

Оба способа описаны нами бегло и не слишком точно. Постройте самостоятельно алгоритмические схемы для решения уравнения $f(x,a)=0$ с ограничениями $g_m(x,a)\neq 0$, где f и g_m – многочлены.

В следующей задаче мы только наметим решение, оставляя заполнение пробелов читателю.

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\frac{ax+3}{x+1}=\frac{x+3}{ax+2}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$(a^2-1)x^2+(5a-4)x+3=0,\quad x\neq -1,\quad x\neq -\frac{2}{a}. \qquad (4)$$

При $a^2-1\neq 0$ находим

$$D=13a^2-40a+28=(13a-14)(a-2).$$

При $D<0$, т.е. $a\in\left(\frac{14}{13};2\right)$, решений нет.

Далее, $D=0$ при $a=\frac{14}{13}$ и при $a=2$. Если $a=\frac{14}{13}$, то $x=-\frac{13}{3}$; если $a=2$, то $x=-1$ и решений у исходного уравнения нет.

При $D>0$ имеем $a\in\left(-\infty;\frac{14}{13}\right)\cup(2;\infty)$ и

$$x_{1,2}=\frac{5a-4\pm\sqrt{(a-2)(13a-14)}}{2\left(1-a^2\right)}.$$

Подставляя $x=-\frac{2}{a}$ и $x=-1$ в уравнение (4), выясним, что при $a=2$; 3 нужно отбросить корень $x=-1$, а при $a=\frac{2}{3}$ – корень $x=-3$. Используя теорему Виета, получаем, что $x=\frac{9}{5}$ при $a=\frac{2}{3}$, при $a=2$ решений нет, $x=-\frac{3}{8}$ при $a=3$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{5a-4\pm\sqrt{(a-2)(13a-14)}}{2\left(1-a^2\right)}$ при

$$a\in(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right)\cup\left(1;\frac{14}{13}\right)\cup(2;3)\cup(3;\infty).$$

При $a\in\left(\frac{14}{13};2\right)$ решений нет; $x=\frac{1}{3}$ при $a=-1$; $x=\frac{9}{5}$ при $a=\frac{2}{3}$; $x=-3$ при $a=1$; $x=-\frac{13}{3}$ при $a=\frac{14}{13}$; $x=-\frac{3}{8}$ при $a=3$.

Упражнение 7. Решите уравнение $\frac{ax+2}{x-5}=\frac{x+1}{ax-1}$.

Задача 5. *Изобразите на координатной плоскости множество точек $M(a,b)$, для которых уравнение*

$$\frac{2a-b+1}{x}-\frac{2a+b-1}{x+2}+\frac{2b}{x+1}=0$$

имеет единственное решение.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$x^2+2(a+1)x+2a-b+1=0,\ x\neq -2;-1;0.$$

Рассмотрим случаи, когда уравнение имеет единственное решение.

Первая возможность: $D=0$, но $x\neq -2$; -1; 0. Тогда $b=-a^2$, $x=-a-1$. Из графика параболы $b=-a^2$ нужно исключить точки, для которых $-a-1=-2$, т.е. $a=1$; $-a-1=-1$, т.е. $a=0$, и $-a-1=0$, т.е. $a=-1$.

Вторая возможность: квадратное уравнение имеет два корня, но один из них принадлежит области определения системы, а другой нет. Подставим запрещенные корни в квадратное уравнение, получим: если $x=0$, то $b=2a+1$; если $x=-1$, то $b=0$; если $x=-2$, то $b=-2a+1$.

Получены уравнения трех прямых, из которых надо исключить точки их пересечения, соответствующие случаю, когда оба корня квадратного уравнения не принадлежат области определения. Это точки $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $\left(\frac{1}{2};0\right)$ и $(0;1)$.

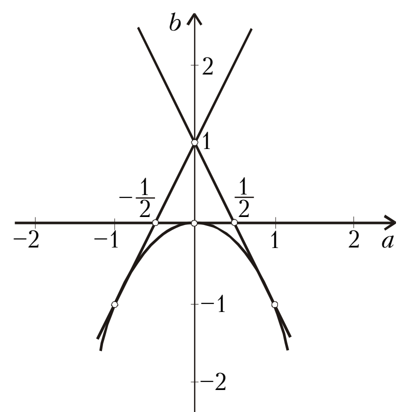

Рис. 2

Ответ изображен на рисунке 2.

Упражнение 8. Изобразите на координатной плоскости множество точек $M(a,b)$, для которых уравнение

$$\frac{a}{x}-\frac{b}{x+1}+\frac{2-b}{x-1}=0$$

имеет единственное решение.