условию диаметр дырки во много раз меньше диаметра поршня). Вода движется быстро только в отверстии, а во всех других местах ее скорость мала. На воду со стороны поршня действует вниз сила $F = Mg - F_A = Mg - \rho Shg$, которая за малый интервал времени τ придает большую скорость массе воды $m = \rho Sv\tau$:

$$F\tau = \frac{mvD^2}{d^2} = \frac{\rho Sv^2\tau D^2}{d^2}.$$

Отсюда мы выразим скорость движения поршня:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{\frac{Mg - \rho Shg}{\rho S}} = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{\rho_п}{\rho} - 1\right)},$$

где $\rho_п/\rho$ – отношение плотности материала поршня к плотности воды. Ответ можно записать и по-другому – через непосредственно заданные в условии задачи величины:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{4M}{\rho\pi D^2 h} - 1\right)}.$$

Характер движения жидкости сильно зависит от формы «входа» отверстия и от вязкости жидкости, поэтому приведенное решение носит очень приблизительный характер.

А.Зильберман

Ф1736. *Две тележки, массы которых M и 3M, соединены легкой пружинкой жесткостью k. Они находятся на гладком горизонтальном столе. Толкнем легкую тележку в направлении более тяжелой, вдоль соединяющей их пружинки, сообщив ей скорость v_0. Через какое время скорость легкой тележки снова станет равной начальному значению? Найдите ее смещение за этот интервал времени.*

Скорость центра масс системы равна $v_0/4$. Относительно центра масс тележки будут колебаться в противофазах. Скорость легкой тележки станет равной своему начальному значению ровно через один период этих колебаний. Длина пружинки от легкой тележки до центра масс составляет $3/4$ полной длины пружинки, следовательно, период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{4/3k}} = \pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

В тот момент, когда скорость легкой тележки равна v_0, она находится на таком же расстоянии от центра масс, как и в первый момент, значит, смещение тележки равно смещению центра масс:

$$l = \frac{v_0}{4}\pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

Р.Александров

Ф1737. *На диаграмме V–T процесс, который проводят с молем разреженного гелия, представляет отрезок прямой $V = V_0 + aT$, причем температура газа в процессе увеличивается от T_0 до $3T_0$ (постоянные V_0, T_0 и a считаются известными). Найдите максимальную и минимальную теплоемкости газа в этом процессе.*

Теплоемкость в таком процессе не остается постоянной (впрочем, выбором констант можно это «поправить»: при $a = 0$ получится $V = \text{const}$, а при $V_0 = 0$ будет постоянным давление – в таких процессах $C = \text{const}$).

Передадим системе очень малое количество теплоты Q, приращение температуры обозначим ΔT. Тогда

$$Q = A + \Delta U = p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{RT}{V}a\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Теплоемкость равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = R\left(\frac{aT}{V} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{aT}{V_0 + aT} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT/V_0}\right).$$

Видно, что мы получили монотонную функцию температуры, причем в зависимости от знака константы a эта функция с ростом температуры T или возрастает, или убывает. Нужно отметить, что отрицательным может быть и V_0 – при разумном выборе константы a объем на заданном интервале $(T_0, 3T_0)$ вполне может оказаться положительным.

Итак, максимальная и минимальная теплоемкости получаются на краях диапазона $(T_0, 3T_0)$:

$$C_1 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT_0/V_0}\right),$$

$$C_2 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + 3aT_0/V_0}\right).$$

Какая из них максимальная, а какая минимальная, зависит от знака a.

А.Простов

Ф1738. *Большой уединенный проводник при помощи резистора сопротивлением R все время поочередно подключают на время τ_1 к проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_1, и на время τ_2 – к другому проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_2. Считая τ_1 и τ_2 малыми, определите тепловую мощность, рассеиваемую в резисторе.*

Будем считать, что потенциал большого проводника φ мало изменяется за промежутки τ_1 и τ_2. Тогда

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{R}\tau_1 = \frac{\varphi - \varphi_2}{R}\tau_2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1 + \varphi_2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

За полный период $(\tau_1 + \tau_2)$ выделяется количество теплоты

$$Q = \frac{(\varphi_1 - \varphi)^2}{R}\tau_1 + \frac{(\varphi - \varphi_2)^2}{R}\tau_2.$$

Средняя мощность равна

$$P_{ср} = \frac{Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}\frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)^2}.$$

А.Повторов