$= \bigcup_{i=1}^{2n} \Phi_i$. Тогда каждая сторона квадрата пересекается ровно с $n+1$ из этих фигур, так как никакая из них по причине выпуклости не может иметь более одной точки ни на какой из сторон квадрата $ABCD$. Но всех выпуклых фигур $2n$ штук, поэтому найдутся две различные фигуры Φ_i и Φ_j такие, что каждая из них имеет по одной точке на каждой из противоположных сторон квадрата AB и CD. Точно так же найдется фигура Φ_k, которая имеет по одной точке на сторонах BC и DA. Но тогда Φ_k имеет общие внутренние точки как с Φ_i так и с Φ_j, что невозможно, так как Φ_k не может совпасть одновременно с Φ_i и с Φ_j, ибо Φ_i и Φ_j различны. Значит, начальное допущение неверно.

б) Многоугольник F разрезан на $2n+1$ выпуклых многоугольников: $F = \bigcup_{i=1}^{2n-1} M_i$. Докажем, что все они – прямоугольники, используя и развивая соображения предыдущего пункта.

Прежде всего сформулируем вспомогательное утверждение: если какой-либо выпуклый многоугольник, содержащийся в F, имеет на сторонах квадрата $ABCD$ четыре точки, то этот многоугольник – прямоугольником (со сторонами, параллельными диагоналям $ABCD$). Для доказательства утверждения нужны лишь свойства выпуклости. Убедитесь в его справедливости самостоятельно.

Далее заметим, что найдется многоугольник M_i, который имеет по одной вершине на сторонах AB и CD квадрата $ABCD$, а также найдется многоугольник M_j, который имеет по одной вершине на сторонах BC и DA. Но тогда M_i и M_j имеют общую внутреннюю точку и потому совпадают $(i=j)$. Значит, M_i является прямоугольником, полупериметр которого равен $2n+2$.

Остается доказать, что остальные многоугольники разрезания (их $2n$) тоже являются прямоугольниками.

Многоугольник F за вычетом прямоугольника M_i распадается на четыре ступенчатые «пирамиды», сумма высот которых равна $2n$. Докажем (и этого будет достаточно!), что если ступенчатая пирамида T высоты k разрезана на k выпуклых многоугольников, то все они – прямоугольники (рис.3). Вершины A_1, A_2, …, A_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Отсюда ясно, что T нельзя разрезать на менее чем k выпуклых многоугольников. Вершины B_1, B_2, …, B_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Но тогда все эти вершины разбиваются на k пар, принадлежащих разным многоугольникам: $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_k, B_k)$. В силу этого каждый из отрезков A_1B_1, A_2B_2, …, A_kB_k является стороной какого-либо из k многоугольников разрезания. Теперь можно сказать, что все доказано, так как эти отрезки как раз разрезают T на k многоугольников, из которых каждый – прямоугольник.

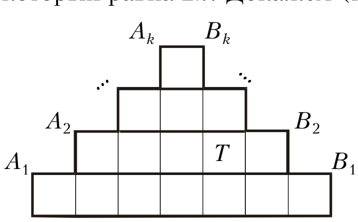

Рис.3

В.Произволов

Ф1730. *В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью $S = 1$ м² под поршнем, находящимся на высоте $h = 1$ м, содержится $N = 100$ одинаковых шариков диаметром $d = 0{,}1$ мм. Шарики хаотически двигаются, средняя квадратичная скорость шарика $v_0 = 100$ м/с. Поршень начинают двигать со скоростью $u = 1$ м/с и останавливают на высоте $2h$. Во сколько раз изменится при этом средняя энергия шариков? Потерь механической энергии при соударениях нет, сила тяжести отсутствует.*

Во время движения шарики практически не сталкиваются друг с другом, так как время между двумя последовательными столкновениями для произвольного шарика велико:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{1}{\pi d^2 n v_0} = \frac{Sh}{\pi d^2 N v_0} \approx 3 \cdot 10^3\ \text{с}.$$

Тогда в процессе движения поршня изменение энергии каждого шарика связано только с его ударами о движущийся поршень и определяется изменением вертикальной составляющей скорости шарика. Найдем это изменение. Пусть расстояние от дна сосуда до поршня в некоторый момент равно l, поршень движется вверх со скоростью u, а шарик догоняет его со скоростью v, существенно большей, чем u. В этом случае изменение скорости шарика после удара равно $\Delta v = -2u$. Следующий удар о поршень произойдет через время $\Delta t = 2l/v$. Поршень за это время переместится на

$$\Delta l = u\Delta t = u\frac{2l}{v} = -\frac{\Delta v}{2}\frac{2l}{v} = -l\frac{\Delta v}{v}.$$

Таким образом,

$$v\Delta l + l\Delta v = 0,$$

т.е. произведение lv остается постоянным. Запишем это для вертикальной составляющей скорости шарика:

$$hv_{z0} = 2hv_z,$$

откуда

$$v_z = \frac{1}{2}v_{z0}.$$

Получается, что на высоте $2h$ вертикальная составляющая скорости шарика в 2 раза меньше, чем на высоте h. Вначале кинетическая энергия шарика была

$$W_0 = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2\right),$$

где

$$\left\langle v_{x0}^2 \right\rangle_{\text{ср}} = \left\langle v_{y0}^2 \right\rangle_{\text{ср}} = \left\langle v_{z0}^2 \right\rangle_{\text{ср}}.$$

При перемещении поршня изменилась только вертикальная составляющая скорости шарика, следовательно, его полная энергия стала

$$W = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + \frac{1}{4}v_{z0}^2\right) = \frac{3}{4}W_0.$$

Через большой промежуток времени, когда из-за соударений между шариками их движение вновь полностью хаотизируется, средняя квадратичная скорость шариков станет равной

$$v_{\text{ср}} = v_0\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 87\ \text{м/с}.$$

Д.Абанин