радиуса. Таким образом, на окружности Q имеется n синих и n красных точек, при этом красные точки как-то занумерованы числами от 1 до n.

Пусть C – синяя точка, в которую переходит n-я красная точка. Ближайшую к C по часовой стрелке точку (из отмеченных $2n$ точек) обозначим буквой K. Уясним для себя, что K – красная точка. Предположение о том, что K может быть синей точкой, приводит к противоречию с тем, что в точку C переходит n-я красная точка.

Каждая красная точка при переходе в синюю вычерчивает на окружности Q дугу поворота. Легко заметить, что дуга CK (от точки C к точке K по часовой стрелке) не является частью никакой дуги поворота при исходной нумерации красных точек. Но решающее свойство дуги CK состоит в том, что она не является частью никакой дуги поворота при всякой нумерации красных точек.

Чтобы в этом убедиться, развернем дугу KC, на которой находятся все отмеченные точки, в виде прямолинейного отрезка KC (точка K – левый конец, точка C – правый). При этом всякая дуга поворота при исходной нумерации красных точек превратится в вектор, идущий слева направо из красной точки в синюю. Так что левее всякой точки отрезка KC находится красных точек не меньше, чем синих. Из этого факта следует решающее свойство дуги CK, о котором сказано выше.

Поэтому можно заключить, что при всякой нумерации красных точек любая дуга поворота будет представляться вектором на отрезке KC, идущем слева направо из красной точки в синюю. Сумма длин таких векторов всегда равна разности суммы координат синих точек и суммы координат красных точек.

Но постоянство суммы длин векторов равносильно постоянству суммы углов поворотов.

В.Произволов

М1724. *В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK (рис.1).*

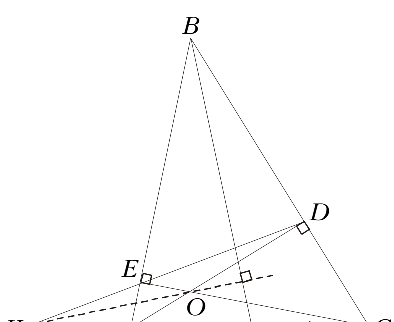

Рис.1

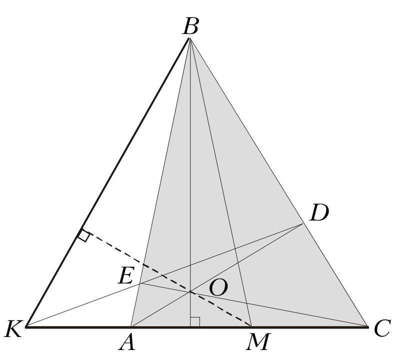

Рис.2

Докажем, что прямая OM перпендикулярна KB. Отсюда непосредственно будет следовать утверждение задачи, поскольку в этом случае O окажется ортоцентром треугольника KBM (рис.2).

Пусть основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BK, служит точка N (рис.3). Поскольку точки E и N лежат на окружности с диаметром OB, то угол BND равен углу BED. Аналогично, четырехугольник $AEDC$ вписан в окружность с диаметром AC. Поэтому угол BED равен углу ACB. Таким образом, сумма углов KND и ACB равна 180°, т.е. четырехугольник $KNDC$ вписанный. Значит, угол NCK равен углу NDK. Но угол NDE равен углу NBE в силу того, что точки B, D, E и N, как мы уже отмечали, лежат на одной окружности с диаметром OB. Поэтому равны углы NBA и NCA. Т.е. точка N лежит на описанной окружности треугольника ABC.

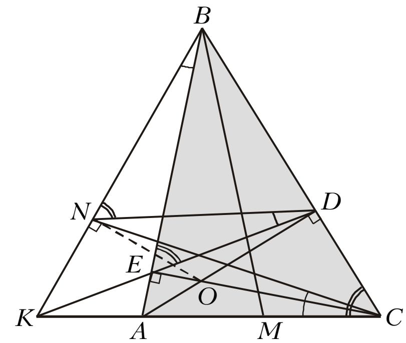

Рис.3

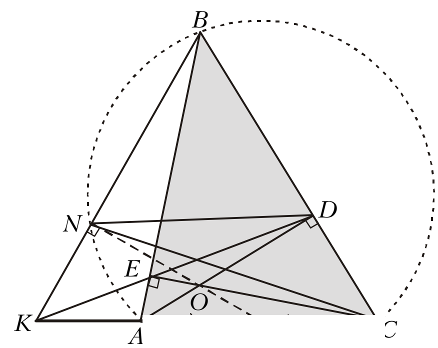

Рис.4

Нам осталось совсем немного. Продолжим прямую NO до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке P (рис.4). Так как угол BNP прямой, то BP – диаметр этой окружности. Значит, углы BAP и BCP прямые. Поэтому отрезок AP параллелен CE, а PC параллелен AD. Но отсюда $APCO$ – параллелограмм, и прямая NO делит AC пополам, что и требовалось доказать.

М.Волчкевич

М1725*. *Из квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F (рис.1). Докажите, что*

а) фигуру F нельзя разрезать на $2n$ выпуклых фигур;

б) если фигура F разрезана на $2n+1$ выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

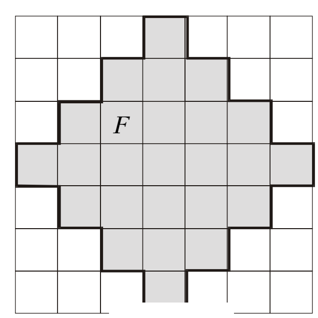

Рис.1

а) Фигура F является многоугольником, который можно заключить в квадрат $ABCD$ так, что на каждой стороне квадрата окажется ровно $n+1$ угловых вершин многоугольника F (рис.2).

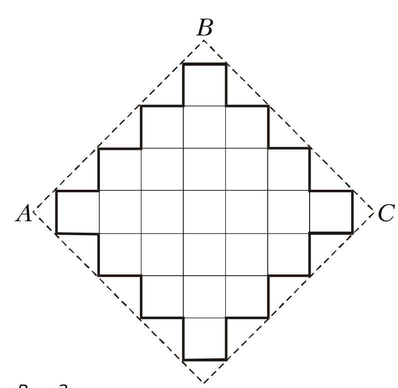

Рис.2

Допустим, что F можно разрезать на $2n$ выпуклых фигур: $F =$