Ф1755. Катушка индуктивностью L подключена параллельно конденсатору емкостью C, а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью C. К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением U_0. Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.

З.Рафаилов

Ф1756. Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба провода). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?

З.Волнов

Ф1757. Стеклянная пластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (рис.4). Основание трапеции D,

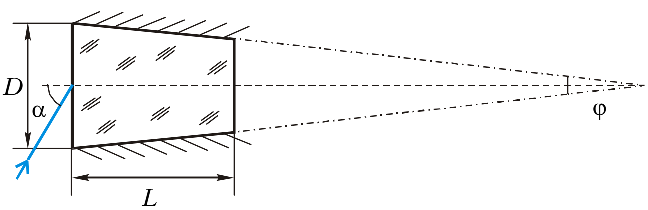

Рис.4

высота L $(D \ll L)$, а угол между боковыми сторонами $\varphi \ll 1$. Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла n. При каких углах падения α луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?

Ю.Старокуров

Решения задач М1721—М1725, Ф1730, Ф1733—Ф1742

М1721. *Существуют ли натуральные числа x и y, которые удовлетворяют равенству $x^2 - 3y^2 = 2000$?*

Ответ: не существуют. Число x^2 не может делиться на 3, ибо правая часть – число 2000 – не делится на 3. Значит, x^2 при делении на 3 дает в остатке 1, а вместе с этим и вся левая часть при делении на 3 дает остаток 1. Но 2000 дает в остатке 2 – противоречие.

Любопытно, что если в правой части вместо 2000 поставить 1000 и сохранить вопрос задачи, то ответ снова будет тот же: не существуют. Однако делением на 3 здесь не обойтись. Здесь поможет деление на 5, а как – подумайте сами.

В.Сендеров

М1722. *Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a; b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.*

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a; b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

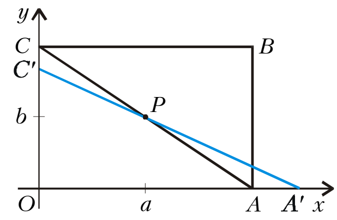

Рис.1

Рассмотрим прямоугольник $OABC$ с центром в точке $P(a; b)$ и сторонами, параллельными осям координат (рис.1). Внутри и на сторонах этого прямоугольника всего $(2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ целочисленных точек.

Чуть-чуть сдвинем точку A вправо. Через полученную точку A' и точку P проведем прямую до пересечения с осью ординат в точке C'. Если сдвиг был достаточно мал, то в треугольнике $OA'C'$ не появится ни одной точки с целыми координатами, которой не было в треугольнике OAC.

При центральной симметрии относительно P любая целочисленная точка прямоугольника $OABC$ переходит в целочисленную точку этого же прямоугольника. Поэтому все отличные от P целочисленные точки прямоугольника разбиваются на пары точек, симметричных относительно P.

Итак, если A' достаточно близка к точке A, то внутри и на границе треугольника $OA'C'$ расположена ровно половина отличных от P целочисленных точек, т.е. $2ab + a + b$ точек. Вместе с точкой P получаем всего $2ab + a + b + 1$ точек. Мы решили пункт б).

Теперь займемся пунктом а). Для определенности, пусть прямая отсекает от первого координатного угла треугольник OA_1C_1, где точка A_1 расположена правее точки A (рис.2). Чтобы получить треугольник A_1C_1O из треугольника ACO, достаточно отрезать от последнего треугольник CC_1P и добавить треугольник AA_1P.

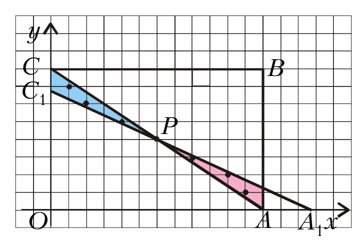

Рис.2

Но при центральной симметрии относительно точки P треугольник CC_1P переходит в (закрашенный на рисунке 2) треугольник, являющийся частью треугольника AA_1P. Целочисленные точки при этом переходят в целочисленные. Задача решена.

М.Панов, А.Спивак

М1723. *Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до n. В порядке нумерации каждый красный вектор поворачивается по часовой стрелке и занимает положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов все красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.*

Можно считать, что все векторы имеют единичную длину, а их концы располагаются на окружности Q единичного