Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1741» или «Ф1748». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1743–М1745 предлагались на XXVI Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1750–Ф1754 и Ф1757 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1741—М1750, Ф1748 — Ф1757

М1741. С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем *характеристикой* исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. Таблица размером $n \times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.

В.Произволов

М1743. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

А.Голованов

М1744*. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.

В.Дольников

М1745. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

С.Берлов

М1746. На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.

В.Произволов

М1747*. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB', CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат на прямых AA', BB', CC'.

А.Заславский

М1748. На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску *неразделимой*, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных