Представьте себе физика-теоретика, который знает теорию относительности и поэтому уверен, что групповая скорость не должна превосходить скорость света в пустоте ($u_{гр} \le c$). Он впервые вывел формулу (8), смотрит на нее и недоумевает: что может заставить функциональную зависимость показателя преломления любого тела от частоты удовлетворять странному неравенству

$$n + \omega \frac{dn}{d\omega} \ge 1? \qquad (9)$$

Это – один из тех вопросов, ответ на который может добавить уважения к теоретической физике.

Оказывается, не прибегая ни к каким модельным соображениям, т.е. не делая никаких предположений о строении тела, можно доказать, что неравенство (9) всегда справедливо. Достаточно опереться лишь на два фундаментальных принципа: на принцип причинности и на принцип, утверждающий невозможность создания вечного двигателя второго рода. Мы нарочно сформулировали эти принципы столь абстрактно, чтобы подчеркнуть их общность. Конечно, хотелось бы продемонстрировать, как они позволяют установить строгое математическое неравенство. К сожалению, это отвлекло бы нас от основной темы статьи, но все же чуть конкретизируем.

Принцип причинности требует, чтобы реакция физического тела в любой момент времени t зависела от воздействий на тело, производимых в момент времени t или при $t_1 < t$ (до момента t, а не после). Запрет существования вечного двигателя второго рода в данном случае означает, что электромагнитная волна, распространяющаяся в равновесной среде, затухает, т.е. теряет свою энергию, а не приобретает ее (советую подумать, как в противном случае можно было бы построить вечный двигатель).

Если показатель преломления $n > 1$, то обе скорости (и фазовая, и групповая) меньше c, а если зависимость показателя преломления от частоты несущественна (т.е. можно считать, что $n = \text{const}$), то

$$u_{фаз} = u_{гр} = \frac{c}{n} < c.$$

В статье «Сверхсветовая скорость» (о которой, я боюсь, вы уже забыли) приводится пример, когда $u_{фаз} > c$, а $u_{гр} < c$: «Пример такой среды – полностью ионизованная *плазма* [4], у которой

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}, \qquad (10)$$

где e и m – заряд и масса электрона, а N – плотность электронов в плазме». Частота ω больше величины $\omega_{пл} = \sqrt{4\pi N e^2/m}$, называемой плазменной частотой. Следовательно, $n < 1$. Заметим, что при $\omega < \omega_{пл}$ показатель преломления – мнимая величина: волна не распространяется.

Используя записанные выше формулы, легко получить (для $\omega > \omega_{пл}$) красивое соотношение

$$u_{фаз} u_{гр} = c^2. \qquad (11)$$

Подсказка: удобно исходить из выражений, пригодных при произвольной зависимости $n = n(\omega)$. Согласно формуле (8),

$$u_{фаз} u_{гр} = \frac{c^2}{n^2 + \frac{1}{2}\omega \frac{dn^2}{d\omega}}.$$

Подставив значение (10) для n^2, убедимся в справедливости формулы (11).

Теперь вернемся к волноводам.

Плоская волна в волноводе «не помещается». Можно сказать, что в попытке «поместиться» волны отражаются от стенок волновода. Интерферируя, падающие и отраженные волны создают вполне определенную структуру. В плоскости сечения волновода волна никуда не бежит. Ее так и называют – стоячей. Бежит волна вдоль оси волновода, которую мы примем за ось Z. Фаза бегущей вдоль оси волновода волны мало чем отличается от фазы плоской монохроматической волны (см. формулу (2)):

$$\varphi = \omega t - kz, \ k \equiv k_z. \qquad (12)$$

Но все же отличается. В формуле (2) k – модуль волнового вектора, т.е. его полная длина. Именно эта величина входит в формулу (7), связывающую частоту с волновым вектором. В формуле (12) k – лишь проекция волнового вектора на ось волновода. Модуль волнового вектора должен включать и поперечные (относительно оси) компоненты вектора $\vec{k}$, поэтому связь между ω и $\vec{k}$ в данном случае сложнее:

$$\omega = c\sqrt{k_\perp^2 + k^2}, \ k \equiv k_z. \qquad (13)$$

Здесь $k_\perp$ – проекция вектора $\vec{k}$ на поперечное сечение волновода, она зависит от величины и формы сечения волновода. Если волновод создан двумя параллельными идеально отражающими плоскостями, то $k_\perp = (2l+1)\pi/(2d)$, где $l = 0, 1, \ldots$ – целые числа, а $2d$ – расстояние между плоскостями, образовавшими волновод. Обратите внимание, что $k_\perp$ в ноль не обращается, и при каждой форме волновода существует набор значений $k_\perp$, которые определяют форму стоячей волны в поперечном сечении волновода. Во всех случаях в наборе отсутствует ноль ($k_\perp \ne 0$), так как плоская волна «не помещается» в волновод.

Зная зависимость частоты от волнового вектора (13), нетрудно вычислить фазовую и групповую скорости волны в волноводе:

$$u_{фаз} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}}$$

и $\qquad (14)$

$$u_{гр} = c\sqrt{1 - \frac{c^2 k_\perp^2}{\omega^2}}.$$

Фазовая скорость волны в волноводе всегда больше скорости света в пустоте c, а групповая, как ей положено, всегда меньше c. Соотношение (11) снова справедливо.

Обратите, пожалуйста, внимание на важный факт: по волноводу могут распространяться не любые волны. Волны должны иметь частоту, превышающую $ck_\perp$. Слишком длинные волны не могут «подобрать» себе необходимую стоячую волну, они буквально не помещаются в волноводе.

Еще одно (последнее) отступление.

Вы, уверен, слышали о соотношениях Луи де Бройля, связывающих корпускулярные и волновые представления:

$$\varepsilon = \hbar\omega, \ \vec{p} = \hbar\vec{k}, \qquad (15)$$

где ε – энергия частицы, $\vec{p}$ – ее

[4] *Курсив, напоминаю, означает, что в ФЭ можно прочитать статью о плазме. Статья большая, а следом за ней идут еще несколько статей, в названии которых основное слово – плазма.*