ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Пусть Алеше x лет, а Грише – y лет. Тогда Боре $x-3$ лет ($x>6$). Согласно условию задачи,

$$y(x-3)=x(x-6)+9,\ \text{отсюда}\ (x-3)(x-3-y)=0.$$

Так как $x>6$, то $x-y=3$, т.е. Алеша старше Гриши на 3 года.

2. Разрежем ленту на такие 7 частей: 1, 23, 4, 5, 6, 7, 89, а затем перевернем шестерку, превратив ее в девятку. В результате получатся 7 попарно взаимно простых чисел: 1, 23, 4, 5, 9, 7, 89. Очевидно, что большего количества частей достичь невозможно.

3. Предположим, найдется такое натуральное число n, что n^2+n+1 делится на 9. Тогда из тождества $(n^2+n+1)(n-1)=$ $=n^3-1$ следует, что n^3-1 делится на 3. Отсюда заключаем, что число n при делении на 3 должно давать в остатке 1. Рассмотрим разность двух чисел $(n-1)^2$ и n^2+n+1, каждое из которых делится на 9:

$$(n-1)^2-(n^2+n+1)=-3n.$$

Отсюда видно, что число n делится на 3. Полученное противоречие свидетельствует о том, что натурального числа n, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

4. Пусть в Думе насчитывается x рыцарей и $101-x$ лжецов. Если вывести из состава Думы рыцаря, то оставшихся $x-1$ рыцарей меньше, чем $101-x$ лжецов, т.е. $x-1<101-x$, откуда $x<51$. Если вывести из состава Думы лжеца, то оставшихся $100-x$ лжецов будет не больше, чем x рыцарей (так как лжец врет), т.е. $100-x\le x$, откуда $x\ge 50$. Исходя из полученных неравенств, получаем $x=50$.

5. Обозначим катеты прямоугольных треугольников *a, b,*

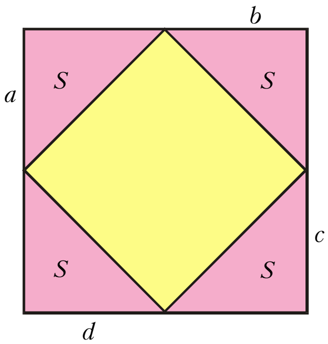

Рис. 1

c, d так, как показано на рисунке 1. Если $a = b = c = d$, то все прямоугольные треугольники равны, и вписанный четырехугольник – квадрат. Если же предположить, что $a > b$, то из равенства площадей треугольников, перемещаясь по кругу от треугольника к треугольнику, получаем неравенства: $b > c > d > a$, что невозможно.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Могут. Развертка куба с выделенными на ней параллелограммами показана на рисунке 2.

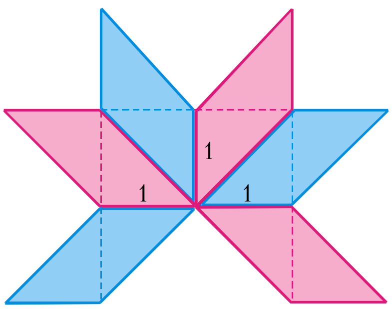

Рис. 2

17. Если общая сумма гонорара нацело делится на число задач, то об экономии не может быть и речи. Поэтому делители числа 400, которые не превышают 24, следует сразу исключить. Таким образом, количество отобранных задач находится среди чисел 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24. Разделим 400 на каждое из этих чисел, выделив целую и дробную части. Каждую дробную часть запишем в виде обыкновенной дроби, для удобства не сокращая числитель и знаменатель на их общий делитель. Если дробная часть не меньше $\frac{1}{2}$, то при округлении таких чисел сумма гонорара увеличилась бы, и вместо экономии получился бы перерасход. Поэтому такие числа также отбрасываем. Для тех же, у которых дробная часть меньше $\frac{1}{2}$, экономия появится, причем нетрудно сообразить, что она будет в точности равна числителю несокращенной дроби. Все вышеизложенное удобно свести в таблицу:

Число задач N	$400/N$	Экономия (если она есть)
3	133 + 1/3	1
6	66 + 4/6	–
7	57 + 1/7	1
9	44 + 4/9	4
11	36 + 4/11	4
12	33 + 4/12	4
13	32 + 10/13	–
14	28 + 8/14	–
15	26 + 10/15	–
17	23 + 9/17	–
18	22 + 4/18	4
19	21 + 1/19	1
21	19 + 1/21	1
22	18 + 4/22	4
23	17 + 9/23	9
24	16 + 16/23	–

Итак, в четырех случаях экономится 1 рубль, в пяти случаях – 4 рубля, и лишь в одном случае – 9 рублей. А теперь вспомним условие, в котором говорится, что главный редактор сумел определить, сколько задач было отвергнуто. Лишь при экономии, равной 9 рублям, можно точно ответить: было опубликовано 23 задачи, а забракована лишь одна.

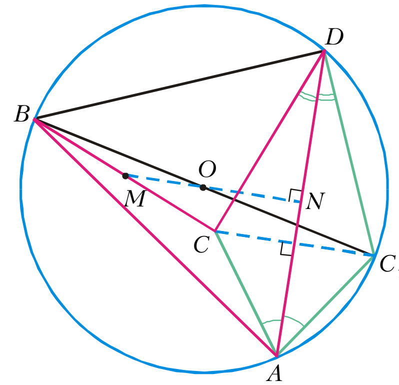

Рис. 3

18. Четырехугольник $ABCD$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым (рис.3). В любом случае, по условию задачи, точка C проектируется на отрезок AD, а не на его продолжение.

Отразим точку C симметрично относительно прямой AD – получим точку C_1, при этом $\angle CAD = \angle C_1AD$, $\angle CDA = \angle C_1DA$. Следовательно, $\angle BAC_1 = \angle BDC_1 = 90°$, и вокруг четырехугольника ABD_1C можно описать окружность с диаметром BC_1. Пусть точка O – центр этой окружности. Соединив точку O с серединой N хорды AD, получим $ON \perp AD$, и следовательно, $ON \| CC_1$. В треугольнике CBC_1 на прямой ON лежит средняя линия OM, поэтому $MN \perp AD$.

19. Представив число n в виде $n = 2k + 1$, где k – любое целое неотрицательное число, запишем исходное выражение:

$$3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67 = 3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15.$$

Докажем методом математической индукции, что число

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15$$

делится на 128. При $k = 0$ это утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что это утверждение справедливо при $k = K$, где K – любое целое неотрицательное число, т.е.

$$3 \cdot 5^{2K+1} + 32K^2 + 120K - 15$$

делится на 128. Отсюда следует, что оно верно и при $k = K + 1$. Действительно,

$$3 \cdot 5^{2(K+1)+1} + 32 \cdot (K+1)^2 + 120 \cdot (K+1) - 15 =$$
$$= 25 \cdot \left(3 \cdot 5^{2K+1} + 32 \cdot K^2 + 120K - 15\right) - 128 \cdot \left(6K^2 + 22K - 4\right).$$

В первой скобке получили выражение, которое по предположению делится на 128, а оставшийся член имеет множитель 128. Итак, утверждение верно и при $k = K + 1$, тем самым доказано исходное утверждение задачи.

20. Победу себе может обеспечить второй игрок. Занумеруем 2000 горизонталей и 1999 вертикалей по порядку. Пусть первый игрок своим очередным ходом закрасил клетку на пересечении n-й горизонтали и m-й вертикали. Тогда второй игрок, закрасив краской того же цвета клетку на пересечении m-й вертикали и свободной горизонтали, имеющей номер той же четности, что и число n, всегда будет иметь возможность сделать очередной ход, не используя новый цвет, и выиграет.

Слоны на водопое

Пусть объем воды в озере равен V, из родников за сутки добавляется объем воды v, а один слон за сутки выпивает количество воды, равное x. Тогда $V + v = 183x$, $V + 5v = 5 \cdot 37x$. Вычитая из второго уравнения первое, найдем, что $4v = 2x$, т.е. $2v = x$. Подставив это соотношение в первое уравнение, получим $V = 365v$, т.е. родники наполняют озеро за 1 год. Обозначив теперь через t время, за которое один слон осушит озеро, получим $V + tv = tx$. Но $x = 2v$, откуда $V = tv$, а поскольку $V = 365v$, то $t = 365$, т.е. один слон выпьет все озеро за год.

Тригонометрические тождества

4. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $\arcsin(3/5) + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

5. 5.

6. $[-13; 13]$.

13. Нужно. Правильный ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ или $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, где k – целое число.

14. $y_2 = (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\sin\beta + (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\beta$.

15. а) $(x+3)^2 + y^2 = 4$; б) $\left(x + 3/\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 3/\sqrt{2}\right)^2 = 4$.

16. Сначала выполним поворот на угол φ по часовой стрелке. Прямая при этом перейдет в ось абсцисс, а точка $(x; y)$ – в точку $(x\cos\varphi + y\sin\varphi; y\cos\varphi - x\sin\varphi)$. При симметрии относительно оси абсцисс меняется знак ординаты, так что получаем точку $(x\cos\varphi + y\sin\varphi; -y\cos\varphi + x\sin\varphi)$. При повороте на угол φ эта точка переходит в точку, абсциссу которой вычисляем по формуле

$$(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\cos\varphi - (-y\cos\varphi + x\sin\varphi)\sin\varphi =$$
$$= x\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + 2y\sin\varphi\cos\varphi = x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi.$$

Аналогично вычисляем ординату:

$$(-y\cos\varphi + x\sin\varphi)\cos\varphi + (x\cos\varphi + y\sin\varphi)\sin\varphi =$$
$$= y\left(-\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + 2x\sin\varphi\cos\varphi = -y\cos 2\varphi + x\sin 2\varphi.$$

17. а) $(-x; -y)$; б) $(2a - x; 2b - y)$; в) $(1-y; 1-x)$; г) $\left(-b\sin 2\varphi + x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi;\ 2b\cos^2\varphi - y\cos 2\varphi + x\sin 2\varphi\right)$.

18. $y^2 = x^2 + 2$. **19.** $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

Неравенство Караматы

1. Требуется доказать, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge k\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

Сводя подобные слагаемые, получаем

$$(n-k)(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) \ge k\left(a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots a_n\right).$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку каждое слагаемое в левой части не меньше любого слагаемого в правой, а количество слагаемых в обеих частях одинаковое.

2. Идея доказательства для $m_i \in \mathbf{N}$ указана в статье. Пусть $m_i \in \mathbf{Q}^+$, т.е. $m_i = \frac{s_i}{t_i}$, где $s_i, t_i \in \mathbf{N}$. Положим $T = t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n$ и рассмотрим неравенство (4) с весами $m_i T \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\frac{m_1Tf(x_1) + m_2Tf(x_2) + \ldots + m_kTf(x_k)}{m_1T + m_2T + \ldots + m_kT} \ge$$
$$\ge f\left(\frac{m_1Tx_1 + m_2Tx_2 + \ldots + m_kTx_k}{m_1T + m_2T + \ldots + m_kT}\right),$$

откуда после очевидного сокращения получаем (4) для $m_i \in \mathbf{Q}^+$. Неравенство Иенсена для $m_i \in \mathbf{R}^+$ получается из (4) для $m_i \in \mathbf{Q}^+$ предельным переходом.

3. Введем замену $a = 0{,}5\ln x$, $b = 0{,}5\ln y$, $c = 0{,}5\ln z$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{2a+2b-4c} + e^{2a+2c-4b} + e^{2b+2c-4a} \ge e^{a+b-2c} + e^{a+c-2b} + e^{b+c-2a}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям задач 1, 2.

4. В силу симметрии будем считать, что $a \ge b \ge c \ge d$. Введем замену $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$, $t = \ln d$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{4x} + e^{4y} + e^{4z} + e^{4t} + e^{x+y+z+t} + \ldots + e^{x+y+z+t} \ge$$
$$\ge e^{2x+2y} + e^{2x+2z} + e^{2x+2t} + e^{2y+2z} + e^{2y+2t} + e^{2z+2t}.$$

Докажем, что набор

$$(4x, 4y, 4z, 4t, x+y+z+t, \ldots, x+y+z+t)$$

мажорирует

$$(2x+2y, 2x+2z, 2x+2t, 2y+2z, 2y+2t, 2z+2t),$$

откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что

$$4x \ge x+y+z+t \ge 4t.$$

Предположим, что

$$4x \ge x+y+z+t \ge 4y$$

(случай $4z \ge x+y+z+t \ge 4t$ рассматривается аналогично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$4x \ge x+y+z+t \ge 4y \ge 4z \ge 4t,$$
$$2x+2y \ge 2x+2z \ge 2x+2t \ge 2y+2z \ge 2y+2t \ge 2z+2t,$$

неравенство $x+t \ge y+z$ следует из $x+y+z+t \ge 4y \Leftrightarrow x+t \ge 3y-z \Leftrightarrow x+t \ge y+z+2(y-z)$ и упорядоченности чисел x, y, z, t. Если же $4y \ge x+y+z+t \ge 4z$, то

$$4x \ge 4y \ge x+y+z+t \ge 4z \ge 4t,$$

второй набор упорядочен одним из двух способов:

$$2x+2y \ge 2x+2z \ge 2y+2z \ge 2y+2t \ge 2z+2t,$$
$$2x+2y \ge 2x+2z \ge 2x+2t \ge 2y+2t \ge 2z+2t.$$

Однако при каждом варианте упорядоченности условия неравенства Караматы, как легко проверить, выполняются.

5. Для доказательства «весового» неравенства Караматы необходимо рассмотреть весовые аналоги лемм 1 и 2. При этом следует применять так называемое весовое раздвижение: одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением суммы $m_ix_i + m_jx_j$ $(x_i \ge x_j)$.

Конденсаторы в электростатическом поле

1. $F = q\frac{q(d_2 - d_1)/(2\varepsilon_0 S) + \mathrm{E}}{d_1 + d_2}$.

2. $E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\frac{l_2}{l_1 + l_2}$, $E_2 = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\frac{l_1}{l_1 + l_2}$. **3.** $E_0 = \sqrt{\frac{3A}{\varepsilon_0 Sd}}$.

4. $a = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{m(d-l)^2}$. **5.** $Q = 8\pi\varepsilon_0 R\mathrm{E} - q/3$.

LXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. *Ответ*: +1 – 2 + 4 + 8 – 16 – 32 + 64 = 27.

Замечание. Попробуйте сами доказать, что

а) любое число, получающееся таким способом, нечетно;

б) из этой записи можно получить любое нечетное число между числами –128 и 128, причем единственным способом.

2. На рисунке 4 приведены примеры такой закраски.

3. Пусть первая цифра кода x, а вторая y. Тогда само число записывается как $10x + y$, а условие задачи можно записать уравнением

$$(x+y) + xy = 10x + y.$$

Следовательно, $xy = 9x$.

Так как код – двузначное число, то $x \ne 0$, а значит, $y = 9$. При этом x можно взять любым, кроме 0.

Ответ: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

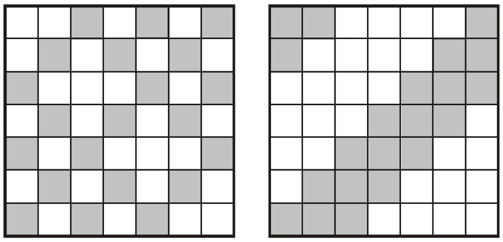

Рис. 4

4. Пример приведен на рисунке 5.

5. Покрасим вершины A, C, F и H в черный цвет, а остальные вершины – в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета. Сделаем первый залп по вершинам C, F и H. Если заяц находился в черной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине A. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (BDE) обязательно достигнет цели.

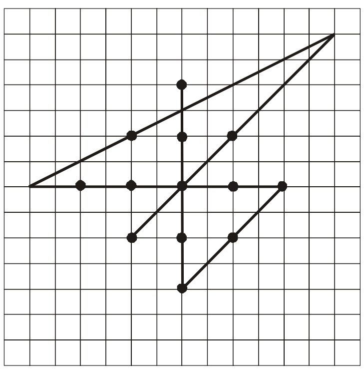

Рис. 5

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (BDE), а потом (CFH) обязательно поразят зайца.

Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (CFH), (BDE), (BDE), (CFH). (Порядок залпов важен!)

7 класс

2. а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. (К этому числу приводит уравнение $2(10+x) = 97 + x$.) б) Нет. Действительно, дробь равна единице, если ее числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

3. На рисунке 6 цифрами отмечены вершины семи приложенных треугольников.

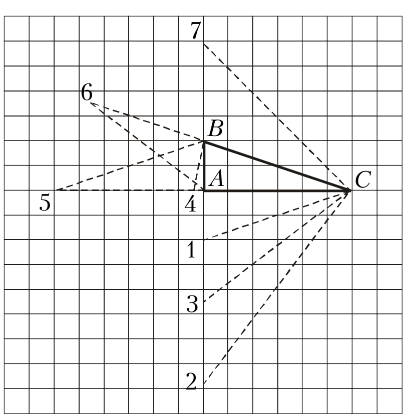

Рис. 6

4. *Ответ*: Нет, не может. *Решение*. Докажем это от противного.

Первый способ. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n таких, что $n(n+1) = 2k(2k+2)$.

Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \le 2k$ и $n > 2k$.

Если $n \le 2k$, то $n+1 < 2k+2$, поэтому $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Противоречие.

Если $n > 2k$, то $n+1 \ge 2k+2$, поэтому $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.

Второй способ. Полученное выше уравнение можно преобразовать так:

$$n(n+1) = 4k(k+1).$$

Домножим обе части уравнения на 4, прибавим к обеим частям 4 и преобразуем:

$$(2n+1)^2 + 3 = \left(2(2k+1)\right)^2.$$

Но если $x^2 - y^2 = 3$, то

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

и $y = 1$, что невозможно, так как $y = 2n+1$.

Третий способ. Полученное уравнение приводится к виду

$$n^2 + n + 1 = (2k+1)^2.$$

Выражение в левой части больше n^2, но меньше $(n+1)^2$, и потому не может равняться квадрату целого числа. Противоречие.

5. Обозначим числа, стоящие в вершинах куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: a, b, c, d, e, f, g и h. Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1<a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут противоположные вершины E и C: $e = b$, а числа c и b отличаются не более чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более чем на 1.

Избранные задачи для старших классов

1. *Ответ*: 50 мест. Если 10 партий наберут ровно по 5% голосов, а две, включая партию любителей математики (ПЛМ), – по 25%, то ПЛМ получит ровно 50 мест в парламенте. Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Обозначим сумму процентов голосов, набранных партиями, прошедшими в парламент, через S, а сумму процентов голосов, набранных непрошедшими партиями, через s. Тогда доля мест, полученных ПЛМ в парламенте, равна

$$\frac{25}{S} = \frac{25}{100-s}.$$

Отсюда видно, что наибольшее число мест ПЛМ получит в том случае, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие партии, максимально. Если бы в парламент не прошли 11 партий, они вместе набрали бы не более 55% голосов, но $55 + 25 < 100$. Значит, не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50% голосов. Поэтому ПЛМ получит в парламенте не более 50% мест, т.е. не более 50 мест.

2. См. рис.7.

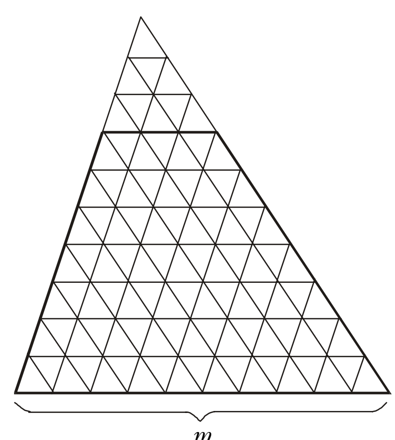

Рис. 7

3. Если N – середина отрезка BM, то $AN \parallel DM$ (поскольку $AB = AD$) и $CN \parallel BE$ (поскольку $CM = CE$). Докажем, что при $BM = AC$ угол ANC прямой.

Так как $MN = MC$, то $\angle MNC = \angle MCN$; так как $MN = MA$, то $\angle MNA = \angle MAN$. Имеем:

$$\angle NAC + \angle ANC + \angle ACN = 180^\circ,$$

$$(\angle NAC + \angle MNA) + (\angle MNC + \angle MCN) = 180^\circ,$$
$$2(\angle MNA + \angle MNC) = 180^\circ.$$

Получим

$$\angle ANC = \angle MNA + \angle MNC = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

4. Расположению карт в колоде сопоставим число, в котором цифр столько, сколько в колоде карт, причем на k-м месте слева стоит «1», если k-я карта снизу лежит рубашкой вверх, и «2» в противном случае. Тогда после каждого преобразования это число уменьшается. (Действительно, сравним полученное число с предыдущим. Среди всех цифр, которые изменились, выберем самую левую, т.е. найдем самый старший изменившийся разряд. Очевидно, в этом разряде цифра «2» сменилась на «1».)

Поскольку количество n-значных чисел из единиц и двоек конечно (равно 2^n), в конце концов мы получим число, состоящее из одних единиц, что соответствует расположению всех карт рубашкой вверх.

5. *Указание*. Пусть $ABCD$ – произвольный прямоугольник, O – произвольная точка. Тогда $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ (это нетрудно вывести из теоремы Пифагора).

Пусть теперь O – центр окружности задачи, R – радиус этой окружности, $ABCD$ – прямоугольник задачи. Имеем: $OB = OD = R$. Следовательно, любая искомая точка C лежит на окружности, Ω с центром O и радиусом $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

Обратно, возьмем любую точку C' этой окружности. На отрезке AC' как на диаметре построим окружность. Она пересекает данную окружность в двух точках; пусть B – любая из них. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ задачи, лежащий по ту же сторону AB, что и точка C'. По доказанному C лежит на окружности Ω, т.е. совпадает с точкой C'.

6. Достаточно узнать число, записанное в одной из клеток. Заметим, что Леша знает разность любых двух чисел, записанных в соприкасающихся по точке клетках: $x - z = (x + y) - (y + z)$ (рис.8). Поэтому Леша знает и разность чисел, стоящих в любых двух клетках одного цвета. Осталось заметить, что из этих разностей ровно одна равна 63.

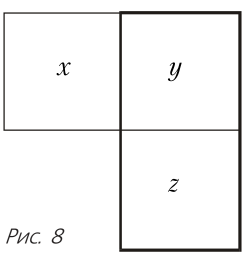

Рис. 8

7. Пусть P и Q – середины AB и CD, O_1 и O_2 – центры окружностей, проходящих через точки A, M, C и B, M, D соответственно, H_1 и H_2 – проекции O_1 и O_2 на прямую PQ (рис.9).

1) Точки M, P и Q лежат на одной прямой. В самом деле, прямые PM и QM содержат радиусы окружностей, касающихся в точке M, и, следовательно, перпендикулярны общей внутренней касательной к этим окружностям.

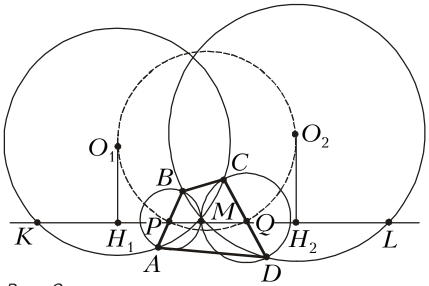

Рис. 9

2) P и Q лежат на окружности с диаметром O_1O_2. Действительно, $PO_1 \perp PO_2$, поскольку эти прямые – серединные перпендикуляры, соответственно, к отрезкам MA и MB, угол между которыми прямой (M лежит на окружности с диаметром AB). Аналогично, $QO_1 \perp QO_2$.

3) Ясно, что $KH_1 = H_1M$, $LH_2 = H_2M$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам).

4) $PH_1 = QH_2$, так как проекция середины отрезка O_1O_2 делит отрезок H_1H_2 пополам; но эта проекция делит пополам и отрезок PQ. Наконец,

$$|MK - ML| = 2|MH_1 - MH_2| = 2|MP - MQ| =$$
$$= 2\left|\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}CD\right| = |AB - CD|.$$

8. $S_{AOB} - S_{AH_AH_BB} = S_{AOK} - S_{KH_AH_BB} = S_{AOH_A} - S_{BOH_B}$ (рис.10).

Но $OH_A \cdot AH_A = OH_B \cdot BH_B = 1$ (точки A и B лежат на графике).

9. Заметим, что $f(x) = (x+6)^2 - 6$. Отсюда видно, что

$$f\Big(f\Big(f\big(f(f(x))\big)\Big)\Big) = (x+6)^{32} - 6.$$

Ответ: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$.

10. Без ограничения общности будем считать длину стороны клетки равной 1; докажем, что каждая из рассматриваемых сумм равна площади многоугольника.

Проведем, например, горизонтальные отрезки. Многоугольник разбивается ими на два треугольника и несколько трапеций; высота каждой из этих фигур равна 1. Выразим площади фигур через основания и высоты. Сложим эти площади и заметим, что каждый горизонтальный отрезок входит в сумму два раза.

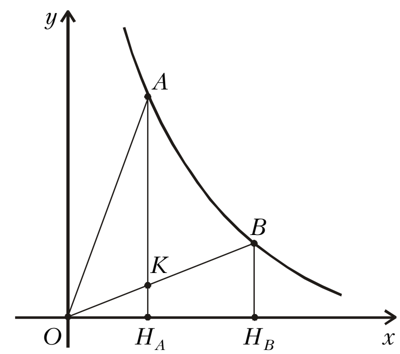

Рис. 10

11. *Ответ*: $2000^2 - 1$. Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000n + m$, d – наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа $2000a - b = (2000^2 - 1)m$ и $2000b - a = (2000^2 - 1)n$. Поскольку m и n взаимно просты, то d делит $2000^2 - 1$. С другой стороны, при $m = 2000^2 - 2000 - 1$, $n = 1$ получаем $a = (2000^2 - 1)(2000 - 1)$, $b = 2000^2 - 1 = d$.

12. *Ответ*: 0. *Указание*. График функции $|\sin kx|$ на отрезке $[0; \pi]$ состоит из k одинаковых «шапочек», которые получаются из графика функции $\sin x$ на том же отрезке путем сжатия к оси ординат в k раз. При этом площадь под графиком также уменьшается в k раз. Как следствие, суммарная площадь под k «шапочками» одинакова при любом натуральном k.

13. *Ответ*: может. Многочлен $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ имеет корень t, больший 0, поскольку $P(0) < 0$ и $P(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда $t^3 = t^2 + t + 1 > t^2 + t$. Возьмем длины палочек равными t^3, t^2, t. После первого отпиливания получим палочки с длинами t^2, t, 1. Так как отношение длин не изменилось, процесс будет продолжаться бесконечно.

14. *Ответ*: а) не могут; б) могут.

а) Пусть N – число игроков, $M = [N/2]$. Игроков, занявших первые M мест, назовем сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $M(M-1)/2$, а во встречах со слабыми – не больше X. Поэтому средний результат сильного не больше $(M-1)/2 + X/M$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $(N - M - 1)/2 + (M(N-M) - X)/(N - M)$. Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну очков, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > M(N-M)/2 >$

$> N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, то доля правильных партий больше $1/4$.

б) Пусть сначала в турнире участвовал $2k+1$ игрок, причем каждый участник с номером $i \le k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков, причем в таблице турнира выше главной диагонали единицы стоят лишь в $\frac{k(k+1)}{2}$ клетках из $\frac{2k(2k+1)}{2}$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние игроки, а игроки из одного блока играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков. Изменим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты игроков из блока $k+1$: в их встречах с игроками из блока $k+1-i$ заменим ik выигрышей ничьими так, что сумма очков каждого игрока из блока $k+1$ уменьшится, а каждого игрока из блока $k+1-i$ увеличится на $\frac{i}{2}$.

(Это можно сделать. Действительно, пусть A и B – k-элементные множества, $i \le k$. Легко построить i (взаимно однозначных) отображений A на B так, что, какой элемент x множества A ни возьми, образы x при любых двух из этих отображений различны.)

Напротив, в партиях с игроками из блока $k+1+i$ заменим ничьими ik проигрышей. Число s неправильных партий станет равно

$$k^2\frac{2k(2k+1)}{2} - k^2\frac{k(k+1)}{2} - 2k\frac{k(k+1)}{2}.$$

При этом общее число партий S равно

$$\frac{k(2k+1)(k(2k+1)-1)}{2}.$$

При $k = 20$ неправильные партии составляют $\frac{235\,600}{335\,790} > 0{,}7$ от общего числа партий. Заметим также, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{s}{S} = \frac{3}{4}.$$

15. Будем помещать между плоскостями правильные тетраэдры, расстояние между противоположными ребрами которых равно расстоянию между плоскостями. Пусть одно из ребер каждого тетраэдра лежит в одной из граничных плоскостей, а противоположное ему – в другой. Два тетраэдра можно расположить так, чтобы конец «верхнего» ребра первого совпадал с серединой «верхнего» ребра второго, а середина «нижнего» ребра первого – с концом «нижнего» ребра второго, и при этом как «верхние», так и «нижние» ребра обоих тетраэдров были перпендикулярны. Распространив этот процесс на весь слой, получим, что каждый тетраэдр окружен четырьмя другими (рис.11). Эти «соседи» не позволяют сдвинуть тетраэдр во внешнюю (по отношению к нему) сторону от любой его грани.

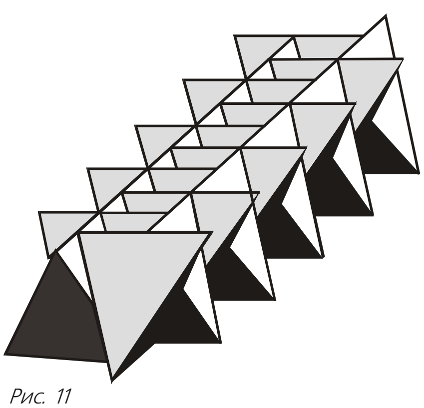

Рис. 11

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Нет. Если три такие хорды нашлись, то они делят площадь круга в одинаковом отношении 3:4 и потому равны. Секторы между их концами равновелики, поэтому между хордами одинаковые углы по 60°. Но тогда можно показать, что эти секторы меньше по площади, чем соседние усеченные секторы.

2. Среди цифр числа n не более двух единиц, а остальные – нули. Всегда $S(ab) \le S(a)S(b)$, причем равенство означает, что при умножении «в столбик» нет переносов из одного разряда в другой. Если при возведении n в четвертую степень нет переносов, то четвертая степень каждой цифры – однозначное число. Если в записи n хотя бы три единицы, то при возведении n^2 в квадрат появляется перенос. Если единиц не более двух, то переноса не возникает.

3. Так как вписанные углы KBD и KCA равны, то точки X, Y, B, C лежат на одной окружности. Тогда углы CBY и CXY равны как вписанные. Далее используем равенство вписанных углов CBD и CAD.

4. (Решение основано на работе ученицы 10 класса лицея «Вторая школа» Е.Муравьевой.) Треугольники, в которые вписаны равные окружности, будем называть отмеченными. Если отмечены какие-либо два треугольника, «симметричных относительно биссектрисы AD», то $AB = AC$.

Действительно, если отмечены AOE и AOF, то $\angle AEB = \angle AFC$, откуда $\angle ABE = \angle ACF$. Пусть отмечены OBF и OCE. Тогда в этих треугольниках равны углы при вершине O, опущенные из O на BF и CE высоты и радиусы вписанных окружностей. Отсюда легко вывести, что равны и сами треугольники. Так как $\angle OBF \ne \angle OEC$, то $\angle OBF = \angle OCE$.

Равенство $\angle OBD = \angle OCD$ следует и из отмеченности треугольников OBD и OCD; доказав это, мы завершили бы решение задачи. (В самом деле, какую биссектрису l ни возьми, найдется хотя бы одна пара «симметричных относительно l» отмеченных треугольников.) Однако мы не умеем доказывать это равенство без вычислений; не прибегая к ним, мы окончим решение несколько по-другому.

Очевидно, у треугольника ABC есть вершина, к которой примыкают отмеченные треугольники, – например, A. Значит, $AB = AC$. Опираясь на это, докажем, что из отмеченности OFB и OFA следует $AC = BC$.

Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, вписанных в треугольники AOE, AOF, BOF соответственно. Легко видеть, что $O_1O_2 \parallel BC$, $O_2O_3 \parallel AB$, $O_3O_1 \parallel BE$, откуда $O_2O_3 = O_1O_2$. Значит, окружности с центрами O_2 и O_3 имеют общую точку касания с CF, $CF \perp O_2O_3$, откуда $AC = BC$.

5. Зафиксировав k, проведем индукцию по числу ребер n. Начало очевидно. Для индуктивного перехода от $n-1$ к n сотрем ребро, соединяющее какие-то вершины A и B. Теперь количество правильных раскрасок есть многочлен $P(k)$. Из него нужно вычесть количество правильных раскрасок графа, получаемого при отождествлении A и B. Но по индуктивному предположению это также некоторый многочлен $Q(k)$.

6. Если $x \le 0$, то $x = -y^2$ для некоторого y, и $f(x) = f(f(f(y))) = -(f(y))^2 \le 0$. В области $x > 0$ функция $f(x)$ взаимно однозначна, и из непрерывности следует ее строгая монотонность. Если $f(a) > 0$ для некоторого $a > 0$, то $f(f(x))$ возрастает при $x = a$, тогда как $-x^2$ убывает.

7. $n+1$. Для $n = 0$ и $n = 1$ результат очевиден. Пусть он верен для какого-то $n > 1$. В кубе с ребром 2 и плотной расстановкой ладей «раздуем» единичные кубики в 2^n раз. На место ладей поставим кубы с плотной расстановкой и $n+1$ «уголовиком». Получим куб с ребром 2^{n+1} и не менее чем $n+2$ «угловиками». Больше их быть и не может: если «угловик» с ребром l содержится в «угловике» с ребром m, то $m \ge 2l$. Последнее следует из того, что в их «разности» можно расставить не более $3(m-l)^2$ ладей так, чтобы они не били друг друга, откуда $3(m-l)^2 \ge m^2 - l^2$.

8. Последовательность натуральных чисел a_k возрастающая, причем $a_{k+1} \le 2a_k$. Поэтому для любого p найдется такое наименьшее a_k, что $10^p \le a_k \le 10^{p+1}$. Для всякого натурального a справедливо неравенство $S(a) \le 9(\lg a + 1)$. Поэтому для достаточно больших p имеем $S(a_{k-1}) < 10p$. Тогда $10^p < a_k < 10^p + 10p$.

Пусть $p = 10^q$ и a_l – первый член последовательности, который больше $10^p + 10p$. Тогда

$$10^{10^q} < a_{l-1} < 10^{10^q} + 10^{q+1},$$

и для достаточно больших q получим

$$S(a_{l-1}) < 10q,\ a_l < 10^{10^q} + 10^{q+1} + 10q.$$

Проведя аналогичные рассуждения для $q = 10^r$, получим, что для некоторого a_m справедливо $\lg\lg\lg a_m > r$, $S(a_m) < 3 + 9(\lg r + 2)$. При росте r отношение $\dfrac{9\lg r + 21}{r}$ стремится к нулю.

9. *Ответ*: 1998964 = 1999000 − 36. Отметим в графе две вершины, не соединенные ребром. Если найдутся еще две такие вершины, то отметим и их, и т.д. Очевидно, что всего будет отмечено менее 10 вершин. Если теперь найдется вершина, не соединенная ребром с какой-либо отмеченной, то отметим и ее, и т.д. Суммарно будет отмечено не более 9 вершин. Каждая неотмеченная соединена со всеми вершинами графа. В «оптимальном» варианте отмечено 9 вершин и все ребра между ними отсутствуют.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Дальность полета струи больше в эксперименте Олега.
2. На переднее колесо действует сила трения, направленная назад, а на заднее колесо – вперед, причем такая же по величине.
3. 1,424 г/л.
4. Пруды будут пересыхать в такой последовательности: *2, 3, 1*. *Указание*: скорость высыхания зависит от уровня воды в пруду.

8 класс

1. $M(1-\rho_2/\rho_1) \le m \le M$ при $\rho_2 \le \rho_1$, $0 \le m \le M$ при $\rho_2 > \rho_1$.
2. $m \approx 1$ кг.
3. См. рис.12.

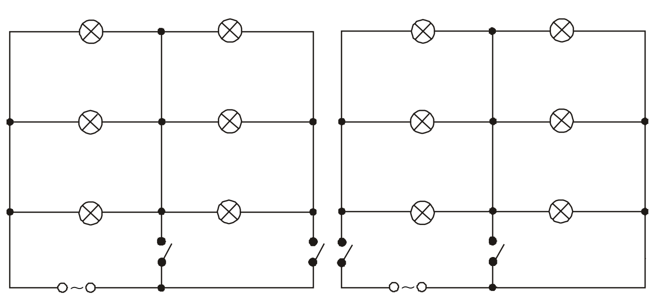

Рис. 12

9 класс

1. См. рис.13.
2. $k = \left[\dfrac{T_1}{\tau}\dfrac{r + (R-r)^2 T_2/T_1}{R^2 - r^2}\right] + 1 = 26$, т.е. мы попадем на середину 26 песни.
3. $a = (2F - \mu m g)/M \approx 8{,}5\ \text{м/с}^2$.

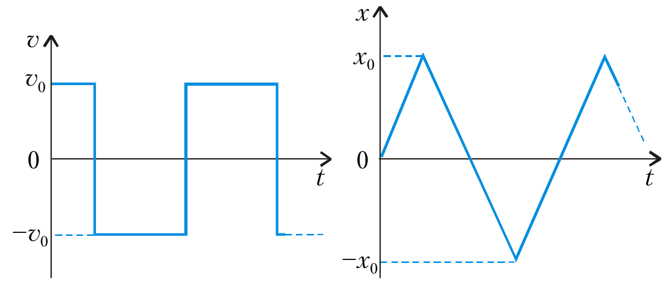

Рис. 13

4. Нужно параллельно соединить друг с другом четыре цепи, две из которых включают в себя по 52 последовательно соединенные лампочки на 3,5 В/0,28 А, а остальные – по 53 последовательно соединенные такие же лампочки. Затем к этой схеме нужно последовательно подключить лампочку на 36 В/40 Вт. При этом в гирлянде будет задействовано 210 лампочек на 3,5 В.

10 класс

1. См. рис.14. **2.** $\Delta t = \dfrac{P}{2m(\mu g)^2} + \dfrac{mv^2}{2P} \approx 4{,}2$ с.
3. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.

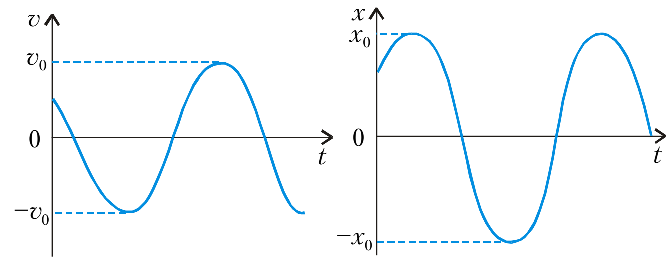

Рис. 14

11 класс

1. См. рис.15. **2.** Возможны 12 вариантов: 0, $U/4$, $U/3$, $U/2$, $2U/3$, $3U/4$, U, $4U/3$, $3U/2$, $2U$, $3U$, $4U$.
3. $\beta \approx r/(L(n-1)) = 0{,}1$ рад.
4. $t = \dfrac{\lg(n_2/n_1)}{\lg 2}\dfrac{T_1T_2}{T_2 - T_1} \approx$ $\approx 6\cdot 10^9$ лет.

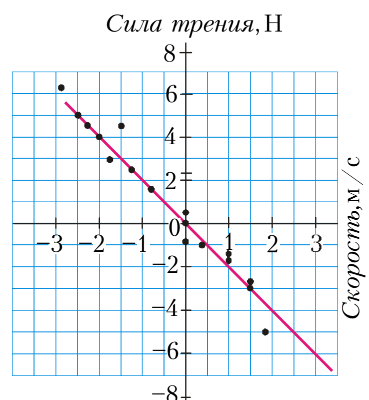

Рис. 15

Второй теоретический тур

8 класс

1. Возможны 4 варианта: $t_1 = 120$ с, $t_2 \approx 10{,}9$ с, $t_3 \approx 5{,}7$ с, $t_4 \approx 3{,}9$ с.
2. Половина карандаша. **3.** $t_1 = t/\sqrt[3]{n} = 10$ мин.

9 класс

1. $M > \rho b\left(c - a/\sqrt{2}\right)^2$. **2.** $(M+2m)g\dfrac{1+\mu^2}{1+\mu} \le F \le$ $\le (M+2m)g\dfrac{1-\mu^2}{1-\mu}$.

3. $v_a(t) = \begin{cases} \dfrac{Mv}{m+M} + \mu g t \text{ при } 0 \le t \le \tau, \\ v \text{ при } t > \tau, \end{cases}$

где $\tau = \dfrac{mv}{(m+M)\mu g}$ – время, через которое доска перестанет двигаться относительно дороги. **4.** $I \approx 0{,}43$ мА.

10 класс

1. $n = \left[\dfrac{gt^2/(2s)+1}{2}\right]$ при $s \le gt^2/2$; случай $s > gt^2/2$ невозможен.
2. $v_{уз} = \sqrt{v^2\sin^2\alpha + (vL\cos\alpha + ul\sin\alpha)^2/(L+l)^2}$.
3. $\eta = 2(T_2 - T_1)/(3T_1 + 5T_2)$. **4.** $I \approx \dfrac{\mathrm{E}}{18000\,R}$. **5.** $F_1 = Fa^2/b^2$.

11 класс

1. $a_1 = a\sqrt{13/2}$. **2.** $T = \sqrt{\dfrac{2\pi V}{gR^2\sin\left(V/\left(R^2L\right)\right)}}$.

IV Международная астрономическая олимпиада

Теоретический тур

8–10 классы

1. $d = 2540$ мм $\cdot\, 31' \cdot \pi/(180\cdot 60)' \approx 23$ мм.
2. а) Можно; б) можно на пределе чувствительности; в) нельзя.
3. На Северном полюсе во время, близкое к дню весеннего равноденствия (в конце марта), или же на Южном полюсе во время, близкое к дню осеннего равноденствия (в конце сентября). Продолжительность восхода составит $\approx 32{,}5$ ч.
4. а) Начнем с того, что на Северном полюсе незаходящих звезд ровно половина от 6000, т.е. имеется 3000 звезд, склонение которых больше 0°. Если мы отойдем от полюса на 1°, то некоторые из этих звезд (склонение которых меньше 1°) станут заходящими. При этом, конечно, появятся другие восходящие и заходящие звезды (склонение которых больше –1°), но для решения нашей задачи это не имеет значения. Оценим, какова будет доля звезд из 3000, склонения которых расположены в интервале от 0° до 1°. Это есть отношение площади полосы шириной 1° вблизи небесного экватора к площади полусферы $2\pi R_0^2$. Площадь полосы – это ее длина вдоль небесного экватора $2\pi R_0$, умноженная на ширину $R_0\cdot\pi/180$. Отношение площадей равно $\left(2\pi R_0\cdot R_0\cdot\pi/180\right)/\left(2\pi R_0^2\right) = \pi/180$. Значит, $3000\cdot\pi/180 \approx 50$ звезд станут заходящими, а незаходящими будут 2950 звезд.
б) Здесь тоже можно воспользоваться похожим приемом (проделайте это самостоятельно). Однако правильный ответ можно дать сразу: склонение, большее 89°, имеет только одна видимая невооруженным глазом звезда – Полярная.
5. Задача допускает множество решений. Например, авторское решение предполагало, что нужно равноускоренно подниматься вертикально вверх (т.е. двигаться так, чтобы высота подъема была пропорциональна квадрату времени).
6. Эту задачу удобнее всего решать в системе отсчета, связанной с отрезком прямой, соединяющей центры Земли и Солнца. В этой системе движения всех небесных тел являются синодическими. Синодический период Луны составляет 29,5 дней, поэтому скорость тени Луны относительно центра Земли равна $V_1 = 2\pi\cdot 384\,000\,000$ м$/29{,}5\cdot 86400$ с ≈ 946 м/с.
Но поверхность Земли вблизи экватора движется в том же направлении со скоростью $V_2 = 40\,000\,000$ м$/86\,400$ с $\approx$ ≈ 463 м/с.
Таким образом, скорость лунной тени относительно земного наблюдателя равна $V = V_1 - V_2 \approx 480$ м/с.

11–12 классы

1. Согласно формуле Вина, длина волны спектрального максимума обратно пропорциональна температуре тела, следовательно, первое тело в 5 раз горячее. Согласно закону Планка, тело с более высокой температурой излучает сильнее на всех длинах волн. По формуле Стефана–Больцмана полная мощность излучения с единицы поверхности первого тела в $5^4 = 625$ раз выше. Для того чтобы ответить на вопрос о соотношении полных энергий, излучаемых этими звездами, данных в задаче не хватает: нужно знать еще соотношение размеров звезд.
2. Радиус черной дыры найдем из условия, что на расстоянии этого радиуса от центра дыры вторая космическая скорость равна скорости света: $c = \sqrt{2GM/R}$, поэтому диаметр дыры равен $D = 4GM/c^2 \approx 1{,}5\cdot 10^{-20}$ м. Объекты такого размера современной науке неизвестны, а свет его просто не заметит – ведь длина волны света ($\sim 10^{-7}$ м) на 13 порядков больше размера нашей черной дыры!

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:
Курьер образования
http://www.courier.com.ru
Vivos Voco!
http://www.accessnet.ru/vivovoco
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени ГУП Чеховский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 142300, г.Чехов Московской области, Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №