$> N(N-1)/8$. Так как общее число партий равно $N(N-1)/2$, то доля правильных партий больше $1/4$.

б) Пусть сначала в турнире участвовал $2k+1$ игрок, причем каждый участник с номером $i \le k$ проиграл участникам с номерами $i+1, \ldots, i+k$ и выиграл у остальных, а каждый участник с номером $i > k$ выиграл у участников с номерами $i-k, \ldots, i-1$ и проиграл остальным. Очевидно, что все игроки набрали по k очков, причем в таблице турнира выше главной диагонали единицы стоят лишь в $\frac{k(k+1)}{2}$ клетках из $\frac{2k(2k+1)}{2}$. Теперь «размножим» каждого игрока, заменив его блоком из k новых, и пусть игроки из разных блоков играют друг с другом так же, как соответствующие прежние игроки, а игроки из одного блока играют друг с другом вничью. Получим новую таблицу, в которой по-прежнему у всех игроков поровну очков. Изменим эту таблицу так, чтобы суммы очков игроков перестали быть равными. Для этого будем менять результаты игроков из блока $k+1$: в их встречах с игроками из блока $k+1-i$ заменим ik выигрышей ничьими так, что сумма очков каждого игрока из блока $k+1$ уменьшится, а каждого игрока из блока $k+1-i$ увеличится на $\frac{i}{2}$.

(Это можно сделать. Действительно, пусть A и B – k-элементные множества, $i \le k$. Легко построить i (взаимно однозначных) отображений A на B так, что, какой элемент x множества A ни возьми, образы x при любых двух из этих отображений различны.)

Напротив, в партиях с игроками из блока $k+1+i$ заменим ничьими ik проигрышей. Число s неправильных партий станет равно

$$k^2\frac{2k(2k+1)}{2}-k^2\frac{k(k+1)}{2}-2k\frac{k(k+1)}{2}.$$

При этом общее число партий S равно

$$\frac{k(2k+1)\big(k(2k+1)-1\big)}{2}.$$

При $k = 20$ неправильные партии составляют $\frac{235600}{335790} > 0{,}7$ от общего числа партий. Заметим также, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{s}{S}=\frac{3}{4}.$$

15. Будем помещать между плоскостями правильные тетраэдры, расстояние между противоположными ребрами которых равно расстоянию между плоскостями. Пусть одно из ребер каждого тетраэдра лежит в одной из граничных плоскостей, а противоположное ему – в другой. Два тетраэдра можно расположить так, чтобы конец «верхнего» ребра первого совпадал с серединой «верхнего» ребра второго, а середина «нижнего» ребра первого – с концом «нижнего» ребра второго, и при этом как «верхние», так и «нижние» ребра обоих тетраэдров были перпендикулярны. Распространив этот процесс на весь слой, получим, что каждый тетраэдр окружен четырьмя другими (рис.11). Эти «соседи» не позволяют сдвинуть тетраэдр во внешнюю (по отношению к нему) сторону от любой его грани.

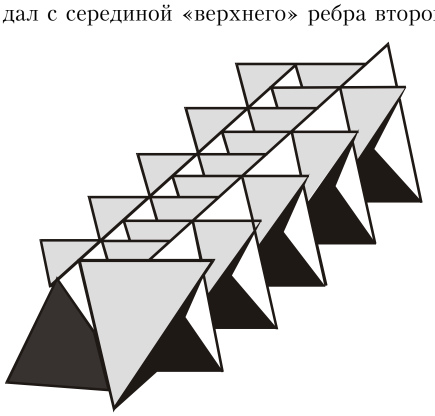

Рис. 11

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Нет. Если три такие хорды нашлись, то они делят площадь круга в одинаковом отношении 3:4 и потому равны. Секторы между их концами равновелики, поэтому между хордами одинаковые углы по 60°. Но тогда можно показать, что эти секторы меньше по площади, чем соседние усеченные секторы.

2. Среди цифр числа n не более двух единиц, а остальные – нули. Всегда $S(ab) \le S(a)S(b)$, причем равенство означает, что при умножении «в столбик» нет переносов из одного разряда в другой. Если при возведении n в четвертую степень нет переносов, то четвертая степень каждой цифры – однозначное число. Если в записи n хотя бы три единицы, то при возведении n^2 в квадрат появляется перенос. Если единиц не более двух, то переноса не возникает.

3. Так как вписанные углы KBD и KCA равны, то точки X, Y, B, C лежат на одной окружности. Тогда углы CBY и CXY равны как вписанные. Далее используем равенство вписанных углов CBD и CAD.

4. (Решение основано на работе ученицы 10 класса лицея «Вторая школа» Е.Муравьевой.) Треугольники, в которые вписаны равные окружности, будем называть отмеченными. Если отмечены какие-либо два треугольника, «симметричных относительно биссектрисы AD», то $AB = AC$.

Действительно, если отмечены AOE и AOF, то $\angle AEB = \angle AFC$, откуда $\angle ABE = \angle ACF$. Пусть отмечены OBF и OCE. Тогда в этих треугольниках равны углы при вершине O, опущенные из O на BF и CE высоты и радиусы вписанных окружностей. Отсюда легко вывести, что равны и сами треугольники. Так как $\angle OBF \ne \angle OEC$, то $\angle OBF = \angle OCE$.

Равенство $\angle OBD = \angle OCD$ следует и из отмеченности треугольников OBD и OCD; доказав это, мы завершили бы решение задачи. (В самом деле, какую биссектрису l ни возьми, найдется хотя бы одна пара «симметричных относительно l» отмеченных треугольников.) Однако мы не умеем доказывать это равенство без вычислений; не прибегая к ним, мы окончим решение несколько по-другому.

Очевидно, у треугольника ABC есть вершина, к которой примыкают отмеченные треугольники, – например, A. Значит, $AB = AC$. Опираясь на это, докажем, что из отмеченности OFB и OFA следует $AC = BC$.

Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, вписанных в треугольники AOE, AOF, BOF соответственно. Легко видеть, что $O_1O_2 \parallel BC$, $O_2O_3 \parallel AB$, $O_3O_1 \parallel BE$, откуда $O_2O_3 = O_1O_2$. Значит, окружности с центрами O_2 и O_3 имеют общую точку касания с CF, $CF \perp O_2O_3$, откуда $AC = BC$.

5. Зафиксировав k, проведем индукцию по числу ребер n. Начало очевидно. Для индуктивного перехода от $n-1$ к n сотрем ребро, соединяющее какие-то вершины A и B. Теперь количество правильных раскрасок есть многочлен $P(k)$. Из него нужно вычесть количество правильных раскрасок графа, получаемого при отождествлении A и B. Но по индуктивному предположению это также некоторый многочлен $Q(k)$.

6. Если $x \le 0$, то $x = -y^2$ для некоторого y, и $f(x) = f\big(f(f(y))\big) = -\big(f(y)\big)^2 \le 0$. В области $x > 0$ функция $f(x)$ взаимно однозначна, и из непрерывности следует ее строгая монотонность. Если $f(a) > 0$ для некоторого $a > 0$, то $f\big(f(x)\big)$ возрастает при $x = a$, тогда как $-x^2$ убывает.

7. $n+1$. Для $n = 0$ и $n = 1$ результат очевиден. Пусть он верен для какого-то $n > 1$. В кубе с ребром 2 и плотной расстановкой ладей «раздуем» единичные кубики в 2^n раз. На место ладей поставим кубы с плотной расстановкой и $n+1$ «уголовиком». Получим куб с ребром 2^{n+1} и не менее чем $n+2$ «угловиками». Больше их быть и не может: если «угловик» с ребром l содержится в «угловике» с ребром m, то $m \ge 2l$. Последнее следует из того, что в их «разности» можно расставить не более $3(m-l)^2$ ладей так, чтобы они не били друг