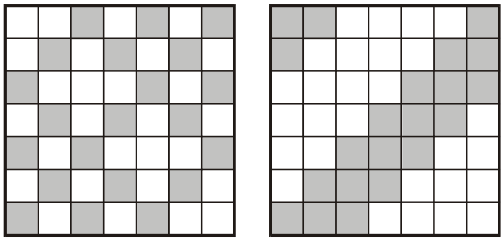

Рис. 4

4. Пример приведен на рисунке 5.

5. Покрасим вершины *A, C, F* и *H* в черный цвет, а остальные вершины – в белый. Заметим, что любые две соседние вершины будут покрашены в разные цвета. Значит, после каждого залпа заяц перебегает в вершину другого цвета. Сделаем первый залп по вершинам *C, F* и *H*. Если заяц находился в черной вершине, то либо охотники сразу попали в него, либо заяц находился в вершине *A*. В последнем случае после залпа заяц перебежит в одну из трех соседних вершин, и залп (*BDE*) обязательно достигнет цели.

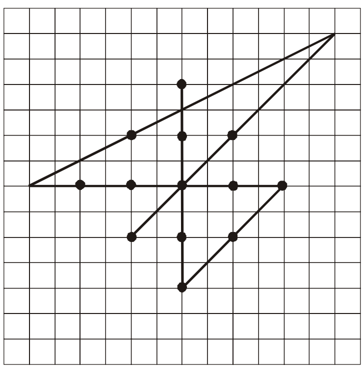

Рис. 5

Если заяц находился в белой вершине, то после двух выстрелов он снова окажется в белой вершине. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, убеждаемся, что залпы (*BDE*), а потом (*CFH*) обязательно поразят зайца.

Ответ: охотники обязательно попадут в зайца, сделав следующие залпы: (*CFH*), (*BDE*), (*BDE*), (*CFH*). (Порядок залпов важен!)

7 класс

2. а) Да, достаточно прибавить к числителю и знаменателю по 77. (К этому числу приводит уравнение $2(10+x) = 97 + x$.) б) Нет. Действительно, дробь равна единице, если ее числитель и знаменатель равны. А Малыш никак не сможет из неравных чисел сделать равные.

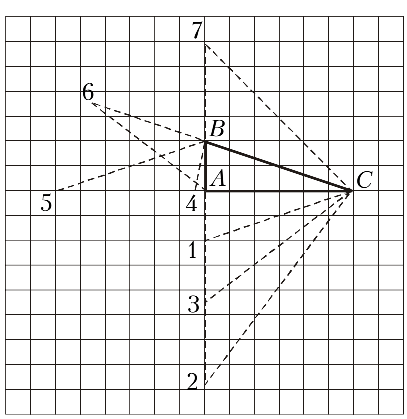

Рис. 6

3. На рисунке 6 цифрами отмечены вершины семи приложенных треугольников.

4. *Ответ*: Нет, не может. *Решение*. Докажем это от противного.

Первый способ. Предположим, что найдутся два натуральных числа *k* и *n* таких, что $n(n+1) = 2k(2k+2)$.

Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \le 2k$ и $n > 2k$.

Если $n \le 2k$, то $n + 1 < 2k + 2$, поэтому $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Противоречие.

Если $n > 2k$, то $n + 1 \ge 2k + 2$, поэтому $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.

Второй способ. Полученное выше уравнение можно преобразовать так:

$$n(n+1) = 4k(k+1).$$

Домножим обе части уравнения на 4, прибавим к обеим частям 4 и преобразуем:

$$(2n+1)^2 + 3 = \left(2(2k+1)\right)^2.$$

Но если $x^2 - y^2 = 3$, то

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

и $y = 1$, что невозможно, так как $y = 2n + 1$.

Третий способ. Полученное уравнение приводится к виду

$$n^2 + n + 1 = (2k+1)^2.$$

Выражение в левой части больше n^2, но меньше $(n+1)^2$, и потому не может равняться квадрату целого числа. Противоречие.

5. Обозначим числа, стоящие в вершинах куба, соответствующими маленькими латинскими буквами: *a, b, c, d, e, f, g* и *h*. Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число *a* (оно находится в вершине *A*). Тогда числа в соседних с *A* вершинах (это вершины *B, D* и *E*) могут принимать только значения *a* или $a + 1$ (так как $a - 1 < a$). Значит, какие-нибудь два из чисел *b, d* и *e* равны.

Пусть равные числа стоят в вершинах *B* и *E* (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут противоположные вершины *E* и *C*: $e = b$, а числа *c* и *b* отличаются не более чем на 1, поэтому числа *e* и *c* отличаются не более чем на 1.

Избранные задачи для старших классов

1. *Ответ*: 50 мест. Если 10 партий наберут ровно по 5% голосов, а две, включая партию любителей математики (ПЛМ), – по 25%, то ПЛМ получит ровно 50 мест в парламенте. Докажем, что большее число мест ПЛМ получить не может. Обозначим сумму процентов голосов, набранных партиями, прошедшими в парламент, через *S*, а сумму процентов голосов, набранных непрошедшими партиями, через *s*. Тогда доля мест, полученных ПЛМ в парламенте, равна

$$\frac{25}{S} = \frac{25}{100 - s}.$$

Отсюда видно, что наибольшее число мест ПЛМ получит в том случае, если общее количество голосов, отданных за непрошедшие партии, максимально. Если бы в парламент не прошли 11 партий, они вместе набрали бы не более 55% голосов, но $55 + 25 < 100$. Значит, не прошли в парламент максимум 10 партий, и они набрали в сумме не более 50% голосов. Поэтому ПЛМ получит в парламенте не более 50% мест, т.е. не более 50 мест.

2. См. рис.7.

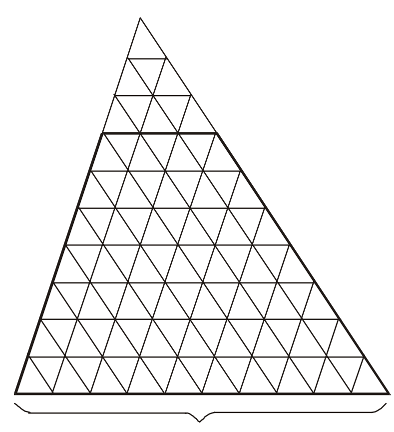

Рис. 7

3. Если *N* – середина отрезка *BM*, то $AN \| DM$ (поскольку $AB = AD$) и $CN \| BE$ (поскольку $CM = CE$). Докажем, что при $BM = AC$ угол *ANC* прямой.

Так как $MN = MC$, то $\angle MNC = \angle MCN$; так как $MN = MA$, то $\angle MNA = \angle MAN$. Имеем:

$$\angle NAC + \angle ANC + \angle ACN = 180^\circ,$$