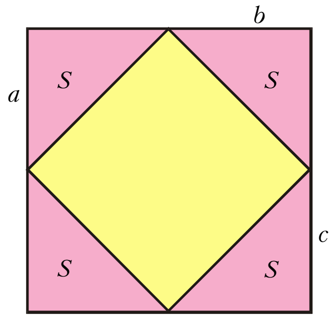

Рис. 1

c, d так, как показано на рисунке 1. Если $a = b = c = d$, то все прямоугольные треугольники равны, и вписанный четырехугольник – квадрат. Если же предположить, что $a > b$, то из равенства площадей треугольников, перемещаясь по кругу от треугольника к треугольнику, получаем неравенства: $b > c > d > a$, что невозможно.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Могут. Развертка куба с выделенными на ней параллелограммами показана на рисунке 2.

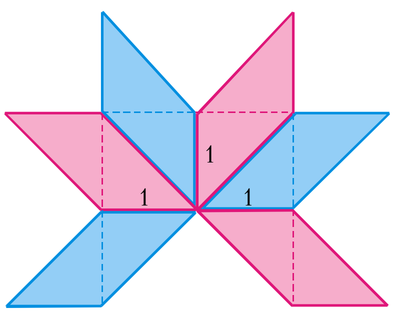

Рис. 2

17. Если общая сумма гонорара нацело делится на число задач, то об экономии не может быть и речи. Поэтому делители числа 400, которые не превышают 24, следует сразу исключить. Таким образом, количество отобранных задач находится среди чисел 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24. Разделим 400 на каждое из этих чисел, выделив целую и дробную части. Каждую дробную часть запишем в виде обыкновенной дроби, для удобства не сокращая числитель и знаменатель на их общий делитель. Если дробная часть не меньше $\frac{1}{2}$, то при округлении таких чисел сумма гонорара увеличилась бы, и вместо экономии получился бы перерасход. Поэтому такие числа также отбрасываем. Для тех же, у которых дробная часть меньше $\frac{1}{2}$, экономия появится, причем нетрудно сообразить, что она будет в точности равна числителю несокращенной дроби. Все вышеизложенное удобно свести в таблицу:

Число задач N	$400/N$	Экономия (если она есть)
3	133 + 1/3	1
6	66 + 4/6	–
7	57 + 1/7	1
9	44 + 4/9	4
11	36 + 4/11	4
12	33 + 4/12	4
13	32 + 10/13	–
14	28 + 8/14	–
15	26 + 10/15	–
17	23 + 9/17	–
18	22 + 4/18	4
19	21 + 1/19	1
21	19 + 1/21	1
22	18 + 4/22	4
23	17 + 9/23	9
24	16 + 16/23	–

Итак, в четырех случаях экономится 1 рубль, в пяти случаях – 4 рубля, и лишь в одном случае – 9 рублей. А теперь вспомним условие, в котором говорится, что главный редактор сумел определить, сколько задач было отвергнуто. Лишь при экономии, равной 9 рублям, можно точно ответить: было опубликовано 23 задачи, а забракована лишь одна.

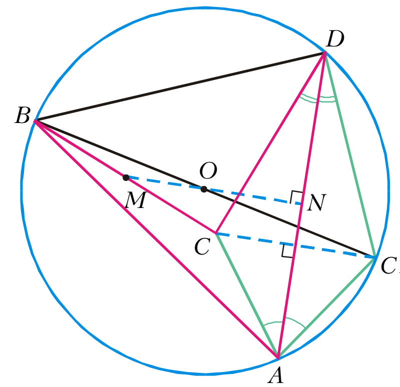

Рис. 3

18. Четырехугольник $ABCD$ может быть как выпуклым, так и невыпуклым (рис.3). В любом случае, по условию задачи, точка C проектируется на отрезок AD, а не на его продолжение.

Отразим точку C симметрично относительно прямой AD – получим точку C_1, при этом $\angle CAD = \angle C_1AD$, $\angle CDA = \angle C_1DA$. Следовательно, $\angle BAC_1 = \angle BDC_1 = 90°$, и вокруг четырехугольника ABD_1C можно описать окружность с диаметром BC_1. Пусть точка O – центр этой окружности. Соединив точку O с серединой N хорды AD, получим $ON \perp AD$, и следовательно, $ON \| CC_1$. В треугольнике CBC_1 на прямой ON лежит средняя линия OM, поэтому $MN \perp AD$.

19. Представив число n в виде $n = 2k + 1$, где k – любое целое неотрицательное число, запишем исходное выражение:

$$3 \cdot 5^n + 8n^2 + 44n - 67 = 3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15.$$

Докажем методом математической индукции, что число

$$3 \cdot 5^{2k+1} + 32k^2 + 120k - 15$$

делится на 128. При $k = 0$ это утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что это утверждение справедливо при $k = K$, где K – любое целое неотрицательное число, т.е.

$$3 \cdot 5^{2K+1} + 32K^2 + 120K - 15$$

делится на 128. Отсюда следует, что оно верно и при $k = K + 1$. Действительно,

$$3 \cdot 5^{2(K+1)+1} + 32 \cdot (K+1)^2 + 120 \cdot (K+1) - 15 =$$

$$= 25 \cdot \left(3 \cdot 5^{2K+1} + 32 \cdot K^2 + 120K - 15\right) - 128 \cdot \left(6K^2 + 22K - 4\right).$$

В первой скобке получили выражение, которое по предположению делится на 128, а оставшийся член имеет множитель 128. Итак, утверждение верно и при $k = K + 1$, тем самым доказано исходное утверждение задачи.

20. Победу себе может обеспечить второй игрок. Занумеруем 2000 горизонталей и 1999 вертикалей по порядку. Пусть первый игрок своим очередным ходом закрасил клетку на пересечении n-й горизонтали и m-й вертикали. Тогда второй игрок, закрасив краской того же цвета клетку на пересечении m-й вертикали и свободной горизонтали, имеющей номер той же четности, что и число n, всегда будет иметь возможность сделать очередной ход, не используя новый цвет, и выиграет.

Слоны на водопое

Пусть объем воды в озере равен V, из родников за сутки добавляется объем воды v, а один слон за сутки выпивает количество воды, равное x. Тогда $V + v = 183x$, $V + 5v = 5 \cdot 37x$. Вычитая из второго уравнения первое, найдем, что $4v = 2x$, т.е. $2v = x$. Подставив это соотношение в первое уравнение, получим $V = 365v$, т.е. родники наполняют озеро за 1 год. Обозначив теперь через t время, за которое один слон осушит озеро, получим $V + tv = tx$. Но $x = 2v$, откуда $V = tv$, а по-