LXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. В записи $*1*2*4*8*16*32*64=$ $=27$ вместо знаков «$*$» поставьте знаки «+» или «–» так, чтобы равенство стало верным.

А.Митягин

2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки.

А.Митягин

3. Шифр кодового замка – двузначное число. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог открыть замок.

А.Митягин, В.Клепцын

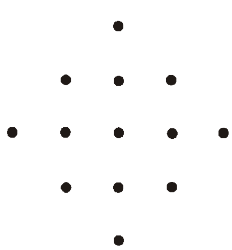

Рис. 1

4. Зачеркните все 13 точек, изображенных на рисунке 1, пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.

Фольклор

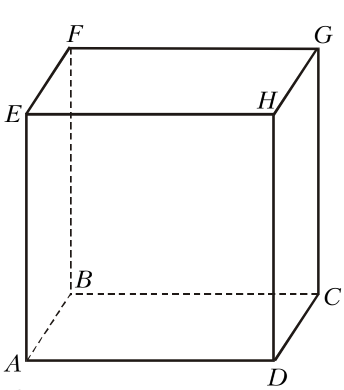

Рис. 2

5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ (рис.2) сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют одновременно, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

А.Спивак

7 класс

1. См. задачу 2 для 6 класса.

2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может:

1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;

2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную $\frac{1}{2}$; б) равную 1?

В.Клепцын

3. Дан прямоугольный треугольник (рис.3). Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.

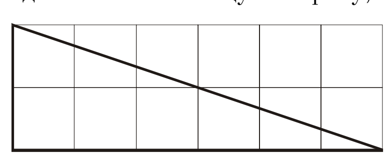

Рис. 3

Укажите (нарисуйте!) несколько различных решений.

А.Шень

4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных (положительных) четных чисел?

В.Произволов

5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ (см. рис.2) расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что найдутся две противоположные вершины (такие, как, например, A и G), числа в которых отличаются не более чем на единицу.

Г.Гальперин

Избранные задачи для старших классов

1. В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т.е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т.п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (8) [1]

И.Ященко

2. Длины оснований трапеции равны m и n (m и n – натуральные числа, $m\neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники. (8)

А.Шаповалов

3. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC. На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства $AD=$ $=AB$ и $CE=CM$ (рис.4). Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны. (8)

Р.Женодаров

4. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вы-

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*