Геометрический способ определения комплексных чисел и операций над ними

С алгебраическим способом введения комплексных чисел можно познакомиться по статьям «Комплексные числа» (Приложение к журналу «Квант» №2 за 1994 г.), «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 г.) и «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» («Квант» №3 за 1999 г.). Сейчас нас интересует другой – геометрический – способ.

Рассмотрим плоскость, в которой задана система координат (рис.8). Любую точку z

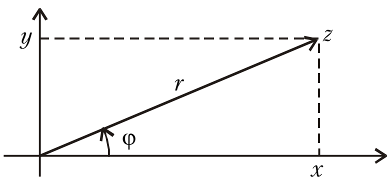

Рис. 8

плоскости можно задавать не только декартовыми координатами $(x;\ y)$, но и полярными координатами $(r;\ \varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки z до начала координат; φ – угол, на который можно повернуть против часовой стрелки положительную полуось числовой прямой до того положения, при котором она пройдет через точку z.

Как видим, всегда $r \geq 0$, причем $r = 0$ только при $z = 0$. Кроме того, для всех $z \neq 0$ величина φ определена с точностью до кратных 360°, так что в интервале $0 \leq \varphi < 360°$ величина φ определена однозначно. Величину r называют модулем (или абсолютной величиной) числа z, φ –аргументом числа z. Обозначения: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Сумму $z_1 + z_2$ любых двух точек z_1 и z_2 определим как сумму векторов, т.е. по правилу параллелограмма (рис.9). Произведение $z_1 z_2$ чисел, полярные координаты

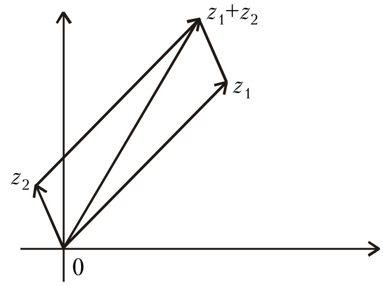

Рис. 9

которых суть $(r_1;\ \varphi_1)$ и $(r_2;\ \varphi_2)$, определим как точку с полярными координатами $(r_1 r_2;\ \varphi_1 + \varphi_2)$ (модули перемножаем, аргументы складываем).

Очевидно, для точек вещественной числовой прямой вышеопределенные операции сложения и умножения не выводят за пределы этой прямой и соответствуют обычным операциям сложения и умножения вещественных чисел. (Проверьте свойства умножения, особенно правило «минус на минус дает плюс».)

Из основных свойств операций умножения и сложения для комплексных чисел неочевиден только распределительный закон:

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2. \qquad (21)$$

Для нас этот закон очень важен: в формуле (18) именно он позволил раскрыть скобки. Давайте его докажем. Геометрически умножение на z означает последовательное (в любом порядке) применение гомотетии с коэффициентом $|z|$ и поворота вокруг начала координат на угол φ. При гомотетии параллелограмм переходит в параллелограмм. При повороте – то же самое, параллелограмм переходит в параллелограмм! А это и есть формула (21)! (Другими словами, сложить сначала два вектора $z_1 + z_2$ (рис.10) и увеличить затем длину полученной суммы в $|z|$ раз, осуществив к тому же поворот на угол φ, – это все равно что сначала каждый из векторов z_1 и z_2 увеличить в $|z|$ раз и повернуть на угол φ, а уже затем сложить полученные векторы.)

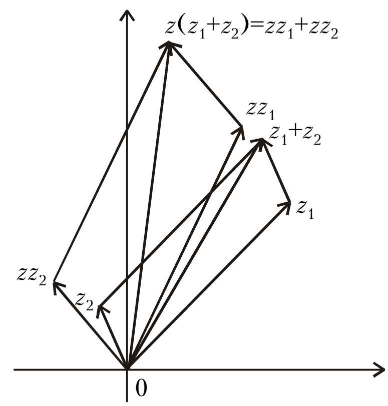

Рис. 10

Случай в газовой туманности

(Начало см. на с. 35)

что сравнимо со средней тепловой скоростью движения молекул. Поэтому к проведенному выше вычислению силы сопротивления нужно тоже относиться лишь как к оценке по порядку величины. Зато уж точно взаимодействие звездолета с облаком является, как говорят физики, *свободномолекулярным*. Действительно, средняя длина свободного пробега молекул между их столкновениями зависит от концентрации молекул n и поперечного сечения их взаимодействия $\pi(2r_м)^2$ так: $\lambda \sim \frac{1}{n\pi(2r_м)^2}$. Подставляя сюда

$$n = \rho/m_{H_2} \sim$$

$$\sim 10^{-16}\ кг/м^3 \Big/ \left(2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ кг\right) \sim$$

$$\sim 3 \cdot 10^{10}\ м^{-3}$$

и $r_м \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м, получим $\lambda \sim 3 \cdot 10^7$ м, что много больше размеров звездолета. Значит, молекулы ударяются о его поверхность независимо друг от друга (не образуя сплошной среды).

Характерное расстояние, на котором заметно убывает энергия второго звездолета (оно входит в показатель экспоненты в равенстве (6)), равно

$$l \sim \frac{10^6\ кг}{\pi \cdot 10^4\ м^2 \cdot 4 \cdot 10^{-16}\ \frac{кг}{м^3}} \sim 10^{17}\ м.$$

Это заметно больше принятой толщины газового облака; значит, затухание колебаний в его пределах будет незначительным.

Однако вспомним T_0: долго же колебаться звездолетам! Вы же без колебаний изучайте физику и подписывайтесь на «Квант».