б) $2\sin x + \cos x = 2$.

5. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3\cos x - 4\sin x.$$

6. Найдите множество значений функции

$$g(x) = 12\sin x + 5\cos x.$$

7. Докажите формулы

а) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

8. Выразите $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$.

9. Докажите формулы

а) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

(Эти формулы называют формулами универсальной тригонометрической подстановки. Они позволяют любое уравнение, в котором присутствуют $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, свести к уравнению с одной неизвестной: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Обратите внимание, что области определения левых и правых частей не совпадают. Поэтому безоглядное применение этих формул может приводить к неприятностям.)

10. Докажите формулы

а) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

д) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

11. а) Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями $y = 2x - 3$ и $y = 5 - 3x$. Измерьте транспортиром величину угла между ними и затем найдите эту величину не приближенно, а точно при помощи формулы тангенса разности.

б) Найдите величину угла между прямыми, заданными уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (угловые коэффициенты k_1 и k_2 – это тангенсы углов наклона прямых к положительному направлению оси абсцисс).

12. Ученик решал задачу и получил неверный ответ. Могла ли быть тому виной использованная им формула

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ ?$$

13. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+45^\circ) = -9\operatorname{ctg}^2 x - 1,$$

воспользовавшись формулой

$$\operatorname{tg}(x+45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}.$$

Нужно ли отдельно рассматривать значения $x = 90^\circ + 180^\circ n$, где n – целое число?

I. Проведем высоту

Перейдем к самому интересному – к доказательствам тождеств (1) и (2). Для удобства читателя доказательства пронумерованы. Сейчас, как видно из заголовка этого раздела, мы рассмотрим первый способ.

Опустим высоту CH на сторону AB треугольника ABC (рис. 1,*а*):

$$AB = AH + HB = AC\cos\alpha + BC\cos\beta. \tag{8}$$

Вспомним теорему синусов: $AB = 2R\sin\gamma$, $AC = 2R\sin\beta$ и $BC = 2R\sin\alpha$,

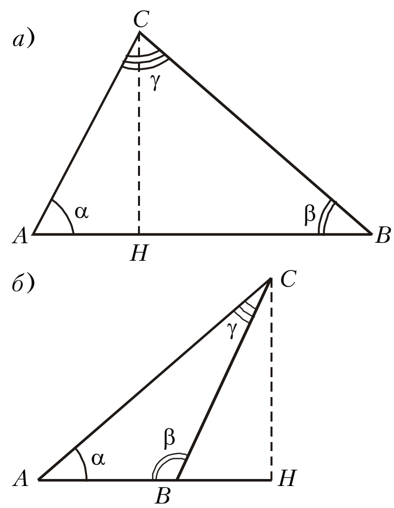

Рис. 1

где R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Подставим эти выражения в формулу (8) и разделим на $2R$. Получим

$$\sin\gamma = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta.$$

Осталось заметить, что $\sin\gamma = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta)$, – и формула (1) доказана.

Существенный недостаток этого доказательства в том, что α и β должны быть острыми углами – иначе треугольник ABC с нужными нам углами либо вообще не существует, либо же высота CH падает не на сторону, а на ее продолжение. Впрочем, эти ограничения можно ослабить, заменив их на неравенства $0 < \alpha$, $0 < \beta$, $\alpha + \beta < 180^\circ$: например, если угол B тупой (рис.1,*б*), то $AB = AH - BH = AC\cos\alpha - BC\cos(180^\circ - \beta) = AC\cos\alpha + BC\cos\beta$.

Однако в формуле (1) величины α и β могут быть любыми, не обязательно положительными; и даже если они положительны, их сумма $\alpha + \beta$ не обязательно меньше 180°. Как быть? Приходится использовать формулы приведения: $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin\alpha$ и т. п. При помощи них можно свести общий случай к ситуации, для которой формула благополучно доказана. Но ничего особенно интересного в этом скучном разборе случаев нет. А потому я не буду этим заниматься и вам не советую, особенно если предстоит сдавать экзамен: вряд ли у экзаменатора хватит терпения выдержать такой перебор. Он просто скажет вам: «До тех пор, пока не разобраны *все* случаи, считать формулу доказанной нельзя. Приходите через год!». И будет прав: если перебор неполон, то утверждение не доказано, а оценка за это полагается сами знаете какая.

II. Выясним геометрический смысл

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и отложим от оси абсцисс против часовой стрелки угол величиной α, а от полученного луча OA – угол величиной β (рис. 2). Опустим перпендикуляры BD и BE на ось абсцисс и луч

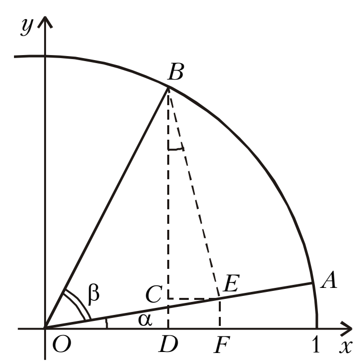

Рис. 2

OA. Затем из точки E опустим перпендикуляры EF и EC на прямые OD и BD. По свойству углов с взаимно перпендикулярными сторонами,

$$\angle CBE = \angle EOF = \alpha.$$

Имеем:

$$\sin(\alpha+\beta) = BD = BC + CD = BC + EF = BE\cos\alpha + OE\sin\alpha = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = OD = OF - DF = OF - CE = OE\cos\alpha - BE\sin\alpha = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha.$$

Изложенное доказательство гораздо лучше первого: оно верно для любых величин α и β – для положительных и отрицательных, больших и маленьких. (Использованные величины «сами собой» в нужных случаях положительны, в нужных – отрицатель-