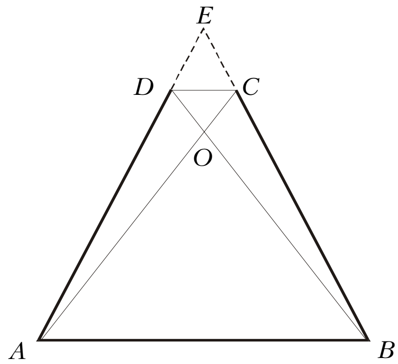

Рис.6

рехугольник превращается в треугольник ABE. Значит, сумма расстояний от предельного положения точки O – минимальная из всевозможных сумм расстояний от точек плоскости до вершин треугольника ABE.

Однако сумма расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника меньше суммы $AE + BE$. Противоречие!

* * *

Не все ладно и в алгебре. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = -1.$$

Возведем обе части в куб, воспользовавшись формулой

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

при $a = \sqrt[3]{1+x}$ и $b = \sqrt[3]{1-x}$. Получаем

$$1 + x + 3\sqrt[3]{1-x^2}\cdot(-1) + 1 - x = -1,$$

т.е. $\sqrt[3]{1-x^2} = 1$, откуда $x = 0$. Подставьте $x = 0$ в исходное уравнение – получите равенство $2 = -1$.

* * *

Тригонометрии я тоже не доверяю. Вот, например, уравнение

$$3\sin x - \cos x = 1.$$

Воспользуемся формулами

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}.$$

Обозначив $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, придем к уравнению

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1,$$

откуда $6t - 1 + t^2 = 1 + t^2$, т.е. $t = 1/3$. Мы нашли ответ: $x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$, где n – любое целое число.

Но удовлетворяющее данному равнению $x = \pi$ не представимо в таком виде.

* * *

Да ладно бы в тригонометрии. Неравенства – и те не позволяют расслабиться. Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ \ldots \qquad (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \ (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, и вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое слагаемое правой части формулы $(*)$ меньше соответствующего слагаемого формулы $(**)$. Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

что удивительно.

* * *

Если вы уже изучали интегралы и логарифмы, то сможете насладиться следующим парадоксом. Вычислим двумя способами $\int_1^2 (\ln 2x)'\,dx$. Во-первых, поскольку $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$, имеем

$$\int_1^2 (\ln 2 + \ln x)'\,dx =$$

$$= \int_1^2 (\ln x)'\,dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2.$$

Во-вторых, этот же интеграл можно вычислить, выполнив замену $t = 2x$:

$$\int_1^2 (\ln 2x)'\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (\ln t)'\,dt = \frac{1}{2}\ln t\Big|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Итак, $\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

* * *

К сожалению, логарифмы в школе проходят очень поздно, так что не все знакомы с ними. Для таких читателей показываю то же самое еще раз, но без логарифмов. С одной стороны,

$$\int_0^1 \left(x^2\right)'dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

С другой стороны, можно выполнить замену $x = t/2$. Имеем:

$$\int_0^1 \left(x^2\right)'dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4}\right)'dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, $1 = 1/2$. Теперь легко доказать, что все числа равны между собой. А это, согласитесь, очень помогает в жизни (особенно при денежных расчетах – только нужно использовать это в выгодную для себя сторону и успеть убежать).

* * *

Наконец, если вы знакомы с формулой Эйлера

$$\sin x = \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)/(2i),$$

то можете легко доказать, что синус тождественно равен нулю:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= \frac{\left(e^{2\pi i}\right)^{x/(2\pi)} - \left(e^{-2\pi i}\right)^{x/(2\pi)}}{2i} =$$

$$= \frac{1^{x/(2\pi)} - 1^{x/(2\pi)}}{2i} = 0.$$

Аналогично можно доказать, что $\cos x$ тождественно равен 1. Вывод: как в элементарной, так и в высшей математике – одна путаница и обман налогоплательщиков.

Б.Споров