Доказательство. Пусть t_1 касается Γ_2 в точке X. Так как O_2 – середина дуги CD, то имеем

$$\angle O_2CD = \frac{1}{2}\overset{\cup}{O_2D}, \text{ а } \angle XCD = \frac{1}{2}\overset{\cup}{CD} = \overset{\cup}{O_2D}.$$

Значит, $\angle XCD = 2\angle O_2CD$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Решение задачи. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей Γ_1 и Γ_2 соответственно и t_1 и t_2 – их общие касательные. Пусть α, β – дуги, высекаемые на Γ прямыми t_1 и t_2 и расположенные так же, как в лемме 1.

Их середины, согласно лемме 1, имеют одинаковую геометрическую степень относительно окружностей Γ_1 и Γ_2; таким образом, они находятся на радикальной оси этих двух окружностей. Значит, A и B являются серединами дуг α и β. Из леммы 1 мы также можем сделать вывод, что C и D – это точки, в которых касательные t_1 и t_2 касаются Γ_1. По лемме 2 получаем, что CD касается Γ_2.

П.Кожевников

М1718. *Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что*

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(y) - 1$$

для всех $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Пусть A – множество значений функции f и $c = f(0)$. Положив $x = y = 0$, мы получим

$$f(-c) = f(c) + c - 1,$$

поэтому $c \neq 0$.

Легко найти сужение функции f на множество A: взяв $x = f(y)$, получим

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

для всех x из A.

Основной шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что множество разностей $x - y$, где $x, y \in A$, есть все множество $\boldsymbol{R}$. Для $y = 0$ мы имеем

$$\{f(x-c) - f(x) | x \in \boldsymbol{R}\} = \{cx + f(c) - 1 | x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R},$$

поскольку $c \neq 0$.

Теперь мы можем получить значение $f(x)$ для произвольного x: если мы выберем y_1, $y_2 \in A$ такие, что $x = y_1 - y_2$, и используем (1), то мы получим

$$f(x) = f(y_1 - y_2) =$$

$$= f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 = \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 +$$

$$+ \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 = c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), мы получим $c = 1$, и поэтому

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Мы получили единственную функцию, которая удовлетворяет функциональному уравнению задачи.

М1719. *Последовательность a_1, a_2, a_3, … задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$*

а) Докажите, что $a_{100} > 14$.

б) Найдите $[a_{1000}]$, т.е. укажите такое целое число m, для которого $m \le a_{1000} < m + 1$.*

в) Докажите существование и найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n}$.

а) Возводим равенство $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ в квадрат и «отбрасываем лишнее»:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2.$$

Вспомнив, что $a_1^2 = 1$, получаем одно за другим неравенства $a_2^2 > a_1^2 + 2 = 3$, $a_3^2 > a_2^2 + 2 > 3 + 2 = 5$, и вообще (при $n > 1$),

$$a_n^2 > 2n - 1. \qquad (*)$$

В частности, $a_{100}^2 > 199 > 196 = 14^2$, что и требовалось.

б) *Ответ*: $[a_{1000}] = 44$.

При $n = 1000$ неравенство ($*$) дает $a_{1000} > 1999 > 44^2$, так что $[a_{1000}] \ge 44$. Чтобы получить оценку сверху, введем величины b_n, такие что $a_n^2 = 2n - 1 + b_n$. В силу неравенства ($*$), имеем $b_n > 0$ при $n > 1$. Далее, запишем формулу $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \dfrac{1}{a_n^2}$ в виде

$$2n + 1 + b_{n+1} = 2n - 1 + b_n + 2 + \frac{1}{2n - 1 + b_n},$$

откуда

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2n - 1 + b_n} \le b_n + \frac{1}{2n-1}.$$

По индукции из последнего неравенства следует, что

$$b_{n+1} \le b_1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}.$$

Поскольку $b_1 = 0$, имеем, в частности,

$$b_{1000} \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1997}.$$

Осталось оценить сумму, оказавшуюся в правой части последнего неравенства. Сгруппируем слагаемые:

$$b_{1000} \le 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{25}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \ldots + \frac{1}{79}\right) + \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{83} + \ldots + \frac{1}{241}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{243} + \frac{1}{239} + \ldots + \frac{1}{727}\right) + \left(\frac{1}{729} + \frac{1}{731} + \ldots + \frac{1}{1997}\right).$$

(Принцип очень простой: в первой скобке три слагаемых, наибольшее из которых равно $1/3$; во второй – девять слагаемых, наибольшее из которых $1/9$; …; в пятой – 243 слагаемых, наибольшее $1/243$; наконец, в шестой скобке