Напоследок подумайте: как можно легко догадаться до равенства (6)?

Кроме этого, докажите следующее усиление предложения пункта в): при любом натуральном n уравнение $(n^2+1)(y^2+1)=z^2$ имеет бесконечно много натуральных решений.

В.Сендеров

М1715. *Все натуральные числа от 1 до 2n записаны в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ такой, что*

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|=2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=n^2.$$

Для произвольной расстановки натуральных чисел от 1 до $2n$ в последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ обозначим

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ \ldots\ +|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|.$$

В результате раскрытия модуля в любом слагаемом этой суммы получим два натуральных числа – одно с плюсом, другое с минусом. Для того чтобы сумма S достигла наибольшего возможного значения, необходимо и достаточно, чтобы числа от 1 до n получали минусы, а числа от $n+1$ до $2n$ – плюсы. Тогда

$$S=2\left[(2n+2n-1+\ldots+n+1)-(n+n-1+\ldots+1)\right]=2n^2.$$

Значит, каждое слагаемое суммы модулей – это модуль разности двух натуральных чисел, одно из которых больше n, а другое не превосходит n. Но тогда

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\ \ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=$$

$$=(2n+2n-1+\ldots+n+1)-(n+n-1+\ldots+1)=n^2.$$

В.Произволов

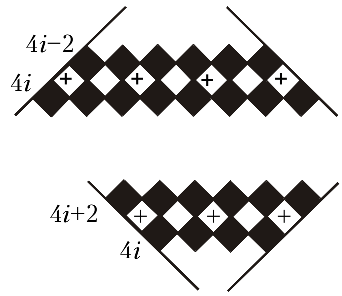
М1716. *В квадрате клетчатой бумаги размером $n\times n$ клеток отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение N, если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.*

Рассмотрим случай четного n.

Сначала раскрасим доску в черный и белый цвета в шахматном порядке. Пусть $f(n)$ – это искомое число, а $f_\omega(n)$ – минимальное число белых клеток, которые должны быть отмечены таким образом, чтобы каждая черная клетка имела соседнюю отмеченную белую. Определим подобным образом $f_b(n)$. Благодаря симметричности шахматной доски ($n=2k$), мы имеем $f_\omega(n)=f_b(n)$; кроме этого, $f(n)=f_\omega(n)+f_b(n)$.

Было бы более удобно посмотреть на доску, развернув ее таким образом, чтобы главная черная диагональ (самая длинная) располагалась горизонтально. Тогда длины остальных черных диагоналей были бы 2, 4, …, $2k$, … …, 4, 2.

Зачеркнем «нечетные» клетки белых диагоналей, расположенных под черными диагоналями длины $4i-2$ в первом случае и под черными диагоналями длины $4i+2$ во втором случае (см. рисунок). В первом случае зачеркнутыми окажутся $2i$ белых клеток, а во втором случае $2i+1$ белых клеток. Таким образом, всего мы зачеркнем



$$2+4+\ldots+k+\ldots+3+1=\frac{k(k+1)}{2}$$

белых клеток. Легко видеть, что каждая черная клетка имеет белую зачеркнутую соседнюю клетку. Из этого следует, что

$$f_\omega(n)\le\frac{k(k+1)}{2}.$$

Рассмотрим $k(k+1)/2$ зачеркнутых белых клеток: у них нет общих черных соседних клеток, следовательно, нам нужно по крайней мере $k(k+1)/2$ черных отмеченных клеток с тем, чтобы «охватить» все эти белые клетки. Поэтому

$$f_b(n)\ge\frac{k(k+1)}{2}.$$

Отсюда мы имеем

$$f_\omega(n)=f_b(n)=\frac{k(k+1)}{2},$$

$$f(n)=k(k+1).$$

Аналогично доказывается, что

$$f(n)=\begin{cases}4k^2-1 \text{ при } n=4k-1,\\ (2k+1)^2 \text{ при } n=4k+1.\end{cases}$$

Е.Баранов, И.Воронович

М1717. *Две окружности Γ_1 и Γ_2, содержащиеся внутри окружности Γ, касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2. Прямая, проходящая через две точки пересечения Γ_1 и Γ_2, пересекает Γ в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2.*

Лемма 1. Окружность k_1 касается окружности k внутренним образом в точке A и касается ее хорды MN в точке B. Пусть C – середина дуги MN окружности k, которая не содержит точку A. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой и $CA\cdot CB=CM^2$.

Доказательство. Гомотетия с центром в точке A, переводящая k_1 в k, переводит MN в касательную к окружности k, параллельную MN, т.е. в прямую, касающуюся окружности k в точке C. Таким образом, A, B, C коллинеарны. Для второй части заметим, что $\angle NMC\equiv\angle CAM$, поэтому ΔACM подобен ΔMCB, следовательно, $CA\cdot CB=CM^2$.

Лемма 2. Пусть окружность Γ_1 проходит через центр O_2 окружности Γ_2; t_1 и t_2 – (различные) общие касательные этих окружностей – касаются Γ_1 в точках C и D. Тогда прямая CD касается Γ_2.