совпадающие на отрезке, совпадают всюду – поскольку многочлен (отличный от тождественного нуля) n-й степени имеет не более n вещественных корней. (О свойствах многочленов можно прочесть, например, в книге «Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика» – М.: Аванта+, 1999.)

Теперь подставим $u = -t^2$ в доказанное тождество

$$(u-1)\left((2u-1)^2-1\right) = 4u(u-1)^2.$$

Мы получим (2).

Чтобы поменять в тождестве t^2 на $-\tau^2$, можно воспользоваться и комплексными числами, а именно, подстановкой $t = i\tau$, где $i^2 = -1$. Такая подстановка корректна, поскольку многочлены в левой и правой частях тождества совпадают на всей комплексной плоскости.

С помощью тригонометрических функций мы легко получили (4) – тождество, в которое входят выражения $t^2 - 1$ и $2t^2 - 1$. Рассмотрим теперь аппарат, позволяющий получать непосредственно также и тождества типа (2).

Гиперболическими функциями называются:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ldots$$

(гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс, ...); они определены для всех значений x, исключая $\operatorname{cth} x$, который теряет смысл при $x = 0$. Эти функции проявляют замечательную аналогию с тригонометрическими функциями.

Так, имеют место формулы (обратите внимание на знаки!)

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

из которых при $y = x$, в частности, следует

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\ \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Докажем с помощью гиперболических функций (2).

В равенство $\operatorname{ch}^2 2x - 1 = \operatorname{sh}^2 2x$ подставим

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

и

$$\operatorname{sh}^2 2x = 4\operatorname{sh}^2 x\left(1 + \operatorname{sh}^2 x\right);$$

получим

$$\left(1 + 2u^2\right)^2 - 1 = 4u^2\left(1 + u^2\right).$$

С помощью равенства

$$\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1$$

легко доказать и (4).

Все продемонстрированные приемы полезны при решении более сложной задачи – пункта в).

в) *Первый способ.* Воспользовавшись тождеством

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \qquad (4')$$

получим

$$1 - \cos^2 3x = \left(1 - \cos^2 x\right)\left(4\cos^2 x - 1\right)^2,$$

$$\left(1 - \cos^2 x\right)\left(1 - \cos^2 3x\right) = \left(1 - \cos^2 x\right)^2\left(4\cos^2 x - 1\right)^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (4′), приходим к формуле

$$\left(1 - y^2\right)\left(1 - \left(4y^3 - 3y\right)^2\right) = \left(1 - y^2\right)^2\left(4y^2 - 1\right)^2. \qquad (4'')$$

Заменяя (как и выше, при решении а) и б)) y^2 на $-y^2$, получаем тождество

$$\left(y^2 + 1\right)\left(\left(4y^3 + 3y\right)^2 + 1\right) = \left(y^2 + 1\right)^2\left(4y^2 + 1\right)^2. \qquad (5)$$

Это тождество позволяет выписать некоторую бесконечную серию натуральных решений:

$$\left(n,\ 4n^3 + 3n,\ \left(n^2 + 1\right)\left(4n^2 + 1\right)\right).$$

Заметим, что эта серия не дает всех решений: например, справедливо равенство

$$\left(1^2 + 1\right)\left(41^2 + 1\right) = 58^2. \qquad (6)$$

Заметим также, что тождество (4″) задает новую бесконечную серию натуральных решений уравнения пункта б).

Второй способ. Воспользуемся тождеством

$$\operatorname{sh} 3x = 3\operatorname{sh} x + 4\operatorname{sh}^3 x; \qquad (6')$$

отсюда

$$\operatorname{sh}^2 3x + 1 = \left(1 + \operatorname{sh}^2 x\right)\left(1 + 4\operatorname{sh}^2 x\right)^2,$$

$$\left(\operatorname{sh}^2 x + 1\right)\left(\operatorname{sh}^2 3x + 1\right) = \left(\left(\operatorname{sh}^2 x + 1\right)\left(4\operatorname{sh}^2 x + 1\right)\right)^2.$$

Пользуясь полученным тождеством и (6′), приходим к (5).

Третий способ. А теперь получим (5) с помощью комплексных чисел. Как и выше, мы будем искать какие-нибудь непостоянные многочлены A, B, C с целыми коэффициентами такие, что $A \ne B$ и

$$\left(A^2 + 1\right)\left(B^2 + 1\right) = C^2.$$

Достаточно найти многочлены D, F, G с целыми коэффициентами такие, что $G \ne \mathrm{const}$ и

$$D \ne \pm G,\ D + i = (F + i)^2(G - i): \qquad (7)$$

в этом случае

$$D^2 + 1 = \left(F^2 + 1\right)^2\left(G^2 + 1\right),$$

$$\left(D^2 + 1\right)\left(G^2 + 1\right) = \left(\left(F^2 + 1\right)\left(G^2 + 1\right)\right)^2.$$

Легко видеть, что (7) выполняется в точности при $G \ne 0$, $F = 2G$.

Положив $G = x$, $F = 2x$, получим

$$(2x + i)^2(x - i) = D + i = 4x^3 + 3x + i,$$

$$\left(\left(4x^3 + 3x\right)^2 + 1\right)\left(x^2 + 1\right) = \left(\left(4x^2 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)\right)^2.$$