Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1736» или «Ф1743». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1736–М1738 предлагались на LXIII Московской математической олимпиаде.

Задачи Ф1743–Ф1746 предлагались на VI Соросовской олимпиаде по физике.

Задачи М1736—М1740, Ф1743—Ф1747

М1736. Какое наибольшее число коней можно расставить на доске 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

М.Горелов

М1737. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K (рис.1). Точки M, N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD. Докажите, что $OMKN$ – параллелограмм.

А.Заславский

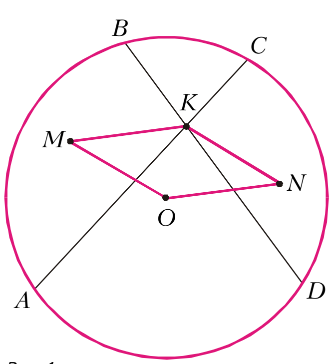

Рис.1

М1738. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту

а) спрятали;

б) отдали постороннему наблюдателю.

Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом посторонний наблюдатель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит?

А.Шаповалов

М1739. Пусть A – произвольная четная цифра, $Б$ – произвольная нечетная цифра. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 2^{2000}, каждая цифра которого – либо A, либо $Б$.

И.Акулич

М1740. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из четырех чисел ab, bc, ca и $ab+bc+ca$ является квадратом.

В.Произволов

Ф1743. На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом 45° к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью 0,02 м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?

З.Рафаилов

Ф1744. В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр d, а половина – диаметр $2d$. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?

А.Зильберман

Ф1745. В очень большом сосуде находится гелий при температуре $T_0 = 1000$ К и давлении $p_0 = 0{,}1$ Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом $V = 1$ л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью $S = 1$ мм^2, а через время $\tau = 0{,}01$ с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.

Р.Александров