получим

$$1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}\le$$

$$\le\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i}, мы запишем наше неравенство в виде

$$1+e^{\Sigma\frac{1}{n}x_i}\le\Pi\left(1+e^{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln\left(1+e^{\Sigma\frac{1}{n}x_i}\right)\le\Sigma\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{x_i}\right).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y=\ln\left(1+e^x\right)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. *Докажите неравенство*

$$\Pi a_i^{a_i}\ge\left(\Sigma\frac{1}{n}a_i\right)^{\Sigma a_i}\quad(a_i>0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n, получим

$$\Sigma\frac{1}{n}a_i\ln a_i\ge\left(\Sigma\frac{1}{n}a_i\right)\ln\Sigma\frac{1}{n}a_i.$$

А это – неравенство Иенсена для выпуклой функции $y=x\ln x$ (пример 5).

Задача 2. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{\left(\Sigma a_i\right)^2+\left(\Sigma b_i\right)^2}\le\Sigma\sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

$$(a_i,b_i>0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y=\sqrt{1+x^2}$ (пример (6)):

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^2}\le\frac{\Sigma m_i\sqrt{1+x_i^2}}{\Sigma m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на Σm_i, получим

$$\sqrt{\left(\Sigma m_i\right)^2+\left(\Sigma m_ix_i\right)^2}\le\Sigma m_i\sqrt{1+x_i^2}=$$

$$=\Sigma\sqrt{m_i^2+\left(m_ix_i\right)^2}.$$

Остается только положить $m_i=a_i$, $x_i=\frac{b_i}{a_i}$.

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. *Докажите неравенство*

$$\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_4}+\frac{p_3}{p_4+p_5}+$$

$$+\frac{p_4}{p_5+p_1}+\frac{p_5}{p_1+p_2}\ge\frac{5}{2}\quad(p_i>0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7, равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i-1}^{5}\frac{p_i}{p_{i+1}+p_{i+2}}\ge\frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y=\frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^{-1}\le\frac{\Sigma m_ix_i^{-1}}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma\frac{m_i}{x_i}\ge\frac{\left(\Sigma m_i\right)^2}{\Sigma m_ix_i}.$$

Положим теперь $m_i=p_i$, $x_i=p_{i+1}+p_{i+2}$:

$$\Sigma\frac{p_i}{p_{i+1}+p_{i+2}}\ge\frac{\left(\Sigma p_i\right)^2}{\Sigma p_i\left(p_{i+1}+p_{i+2}\right)}.$$

Тем самым, достаточно доказать неравенство

$$\frac{\left(\Sigma p_i\right)^2}{\Sigma p_i\left(p_{i+1}+p_{i+2}\right)}\ge\frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$2\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_1p_5+$$

$$+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_3p_4+$$

$$+p_3p_5+p_4p_5.$$

Так как правая часть равна

$$\frac{1}{2}\Big(\left(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5\right)^2-$$

$$-\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\Big),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$5\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge\left(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5\right)^2.$$

Записав это в виде

$$\left(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2\right)\times$$

$$\times\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge\left(1\cdot p_1+1\cdot p_2+1\cdot p_3+1\cdot p_4+1\cdot p_5\right)^2,$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши—Буняковского.

Упражнения

Докажите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p<n^{p-1}\sum_{i=1}^n x_i^p$ при $p>1$, $x_i>0$.

5. $\sum_{i=1}^n a_i^p\cdot\sum_{i=1}^n b_i^p\ge n^{2-p}\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^p$ при $p\ge 2$, $a_i,b_i>0$.

6. $\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{s-a_i}\ge\frac{n}{n-1}$, где $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$ и $a_i>0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge 3\sqrt{2}$ при $a,\ b,\ c>0$.

8. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge$ $\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$ при $a,\ b,\ c>0$.

9. $\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n}\le\frac{\prod_{i=1}^n\left(1-x_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n\left(1-x_i\right)\right)^n}$ при $0<x_i<\frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$ при $a,\ b,\ c,\ d>0$.

11. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+$ $+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\ge 3$ при $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f>0$.