

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M1726» или «Ф1733». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M1726–M1728 предлагались на осеннем Турнире городов.

Задачи Ф1733–Ф1735, Ф1739, Ф1740 и Ф1742 предлагались на очном туре VI Соросовской олимпиады по физике.

Задачи M1726–M1735, Ф1733–Ф1742

M1726. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения n .

Р.Женодаров

M1727. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.

А.Шановалов

M1728. Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB ,

- делит периметр треугольника ABC пополам;
- параллельна биссектрисе угла ACB .

Л.Емельянов

M1729. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.

В.Произволов

M1730*. Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения

его диагоналей проводится прямая, параллельная MK . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

М.Волчкевич

M1731. Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

M1732. а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B , имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.

б*) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?

В.Произволов

M1733. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство

$$\int_0^1 |x - f(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

К.Каибханов

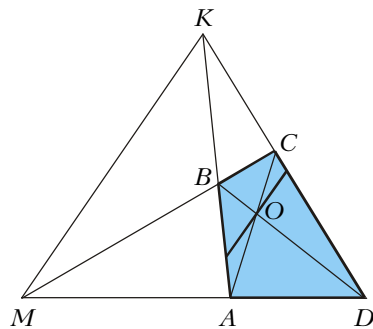


Рис.1

M1734. Докажите, что уравнение $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta = \cos x$ на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет решений при $\beta \leq 3$, но имеет единственное решение при $\beta > 3$.

В. Сендеров

M1735*. Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.

В. Произволов

Ф1733. Корабль злобных пришельцев из космоса представляет собой цилиндр высотой 100 м и диаметром 100 м, стоящий вертикально на плоской поверхности. Единственной уязвимой точкой корабля является маленький люк, находящийся в центре верхнего круга, да и то только в том случае, если попавший в него снаряд имеет скорость не меньше 20 м/с и прилетает под углом к вертикали не больше 45° (данные получены из источников, заслуживающих полного доверия). В нашем распоряжении имеется маленькая пушка, находящаяся на уровне земли. При какой минимальной скорости вылета снаряда из ствола пушки мы сможем поразить корабль? Стрелять можно под любым углом и из любой точки поверхности земли.

З. Рафаилов

Ф1734. Через неподвижный блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены два одинаковых груза массой M каждый. К боковой поверхности одного из грузов прицепился таракан массой m . Вначале грузы удерживали, причем «тяжелый» груз находился на H выше легкого. Грузы отпустили. В тот момент когда они поравнялись, таракан прыгнул перпендикулярно боковой поверхности своего груза и уцепился за двигавшийся вверх второй груз. Через какое время грузы снова поравняются? На какую максимальную высоту поднимется груз с тараканом?

Р. Тараканов

Ф1735. В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде диаметром D , заполненном водой плотностью ρ , находится толстый тяжелый поршень массой M (рис.2), плотно прилегающий к боковым стенкам (вода через просвет между поршнем и стенками не протекает). По оси поршня сделано отверстие малого диаметра d ($d \ll D$), через которое вода может перетекать из одной части сосуда в другую. Поршень отпускают, и через некоторое время его движение становится равномерным. Найдите скорость установившегося движения поршня. Вязкость жидкости невелика. Толщина поршня h .

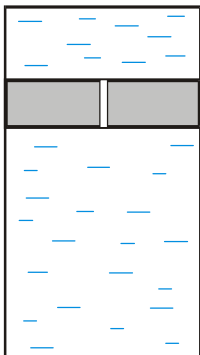


Рис.2

А. Зильберман

Ф1736. Две тележки, массы которых M и $3M$, соединены легкой пружинкой жесткостью k . Они находятся на гладком горизонтальном столе. Толкнем легкую тележку в направлении более тяжелой, вдоль соединяющей их пружинки, сообщив ей скорость v_0 . Через какое время

скорость легкой тележки снова станет равной начальному значению? Найдите ее смещение за этот интервал времени.

Р. Александров

Ф1737. На диаграмме $V-T$ процесс, который проводят с молем разреженного гелия, представляет отрезок прямой $V = V_0 + aT$, причем температура газа в процессе увеличивается от T_0 до $3T_0$ (постоянные V_0 , T_0 и a считаются известными). Найдите максимальную и минимальную теплоемкости газа в этом процессе.

А. Простов

Ф1738. Большой уединенный проводник при помощи резистора сопротивлением R все время поочередно подключают на время τ_1 к проводнику, потенциал которого поддерживается равным ϕ_1 , и на время τ_2 – к другому проводнику, потенциал которого поддерживается равным ϕ_2 . Считая τ_1 и τ_2 малыми, определите тепловую мощность, рассеиваемую в резисторе.

А. Повторов

Ф1739. В схеме, изображенной на рисунке 3, все три батарейки одинаковые, напряжение каждой составляет 3 В, два резистора имеют сопротивления по 100 Ом, сопротивление третьего 200 Ом. Какими могут быть токи

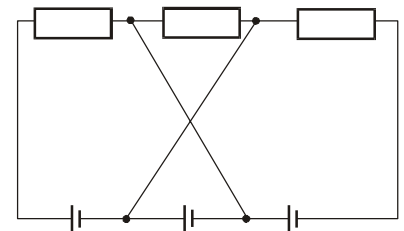


Рис.3

через каждую из батареек? Провода в точке пересечения не соединены.

М. Учителев

Ф1740. Электромагнит представляет собой катушку, намотанную на цилиндрический сердечник. На оси электромагнита найдем точку, в которой магнитная индукция равна 10^{-3} Тл (это намного меньше поля у торца сердечника), принесем в эту точку небольшой сверхпроводящий круговой виток и расположим его перпендикулярно оси магнита так, чтобы ось проходила через центр витка. При этом в витке возникнет ток 10 А. Отодвинем виток параллельно самому себе вдоль оси на 1 см – ток витка уменьшится на 1%. С какой силой магнит действовал на виток в первой точке? Диаметр витка 3 см. Вначале, на большом расстоянии от электромагнита, тока в витке не было.

А. Витков

Ф1741. К источнику переменного напряжения подключены последовательно резистор сопротивлением 200 Ом и катушка индуктивностью 2 Гн, а параллельно этой цепочке включен конденсатор емкостью 10 мкФ. Ток через резистор и катушку имеет амплитуду 0,2 А, ток через конденсатор имеет амплитуду 0,3 А. Найдите по этим данным частоту переменного тока, амплитуду тока, протекающего через источник, и сдвиг фаз между напряжением источника и током через него.

А. Старов

Ф1742. Резистор сопротивлением 200 Ом подключен к сети 220 В, 50 Гц необычным образом – через трансформатор с одинаковыми обмотками (рис.4). Индуктивность каждой обмотки составляет 5 Гн. Найдите ток через резистор и сдвиг фаз между этим током и напряжением

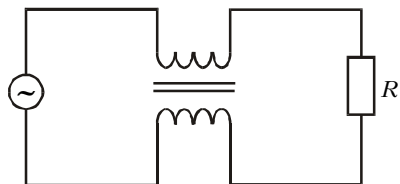


Рис.4

сети. Сопротивлением проводов и обмоток трансформатора пренебречь, рассеяние магнитного потока считать малым.

А.Зильберман