Математическая регата

Регата – это командное соревнование по решению задач. Не привычная олимпиада и даже не математический бой, а что-то вроде шахматного блица. Каждая команда состоит из четырех человек, которые делают одну общую работу. В каждом из пяти туров команда сдает по три листочка – по одному на каждую задачу.

Для регат пригодны только те задачи, решение которых может быть изложено сравнительно кратко; времени на обдумывание очень мало! Из-за цейтнота возникает спортивный азарт, который захватывает всех – и тех, у кого мало что получается, и тех, кто борется за первые места (результаты каждого очередного тура жюри объявляет перед следующим туром, так что все время все видят, как идет борьба). Полезен ли этот азарт? Конечно, да. Особенно замечательно, что борьба идет не между участниками, а между командами; во время регаты все думают только о командном результате, учатся взаимодействовать, помогать друг другу.

В регате есть не только развлекательно-спортивная, но и учебная сторона. После каждого тура, когда уже собраны листочки и жюри занялось проверкой, ведущий рассказывает решения задач этого тура. Участники слушают рассказ решений с огромным интересом, поскольку несколько минут назад сами решали эти задачи. И воспринимают это не как работу, а скорее как отдых перед очередным туром!

А теперь – устройте себе регату. Перед вами задания, предлагавшиеся в прошлом году десятиклассникам нескольких московских школ.

Заготовьте пятнадцать листочков, прочитайте условия первого тура и заметьте по часам время (в зависимости от возраста и подготовки можете увеличить время, но не более чем в четыре раза!). Скорее всего, задач, которые удастся решить и аккуратно оформить, окажется неожиданно мало, особенно после того, как вы сверите свои решения с нашими. Потом прочитайте задачи второго тура, и так дальше – до пятого тура.

Первый тур

(10 минут; каждая задача – 6 баллов)

1.1. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

1.2. Окружность, построенная на основании AB трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается основания CD. Найдите величины углов этой трапеции.

1.3. Решите неравенство

$$x^2 - (\sin 4 + \sin 5)x + \sin 4 \sin 5 < 0.$$

В задаче **1.1** можно записать условие в виде

$$b = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$$

и заметить, что функция в правой части непрерывна и возрастает, стремясь к бесконечности, на всей своей области определения – луче $[5/3; +\infty)$. Значит, при $b \geq \sqrt{3\cdot\frac{5}{3}+11} = 4$ уравнение имеет одно решение, а при $b < 4$ решений нет.

Для тех, кому эта задача кажется слишком простой, заметим, что на Санкт-Петербургской олимпиаде 1999 года одиннадцатиклассники искали наибольшее значение функции

$$\sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{a+1} - \sqrt[4]{a},$$

которую можно представить в виде суммы двух функций: $\sqrt[4]{1-a}$ и $\sqrt[4]{1+a} - \sqrt[4]{a}$. Убывание первой из них очевидно, а убывание второй следует из тождества

$$\sqrt[4]{1+a} - \sqrt[4]{a} = \\ = \frac{1}{\sqrt[4]{(1+a)^3} + \sqrt[4]{a(1+a)^2} + \sqrt[4]{a^2(1+a)} + \sqrt[4]{a^3}}.$$

Так что не только на регате, но и на вполне уважаемых олимпиадах встречаются задачи о том, что сумма двух убывающих функций убывает!

Задача **1.2** не была решена ни одной командой. Между тем величина угла AOM (рис.1) равна 30°, ибо именно такова величина угла в прямоугольном треугольнике, катет MN которого вдвое меньше гипотенузы MO. Далее, зная $\angle AOM = 30°$, легко найти величину угла MAO равнобедренного треугольника MAO по формуле

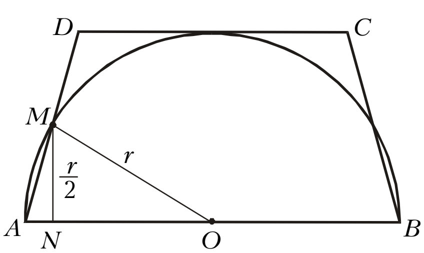

Рис. 1

$$(180° - 30°)/2 = 75°.$$

В чем же причина такой недодумчивости десятиклассников? Уже несколько лет подряд экзамен по геометрии в конце девятого класса в школах Москвы не проводился. А когда в 1999 году его решили-таки провести, то во многих школах экзаменовали по так называемым открытым билетам, т.е. задолго до экзамена сообщили условия экзаменационных задач.

В задаче **1.3** практически все смогли разложить многочлен на множители:

$$(x - \sin 4)(x - \sin 5) < 0,$$

но многие не заметили, что $\sin 4 > \sin 5$, и поэтому записали ответ в виде $(\sin 4; \sin 5)$ вместо правильного $(\sin 5; \sin 4)$.

Второй тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. При какой комбинации знаков верно равенство

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha},$$

где $\alpha = 19\pi/11$?

2.2. Точки A, B и C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколько существует таких точек D, что множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет хотя бы одну ось симметрии?

2.3. Дано несколько ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b можно записать числа $a + \frac{b}{2}$ и $b - \frac{a}{2}$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

Задача **2.1** не очень интересна, поэтому ограничимся ответом:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Кроме внимания, ничего особенного не

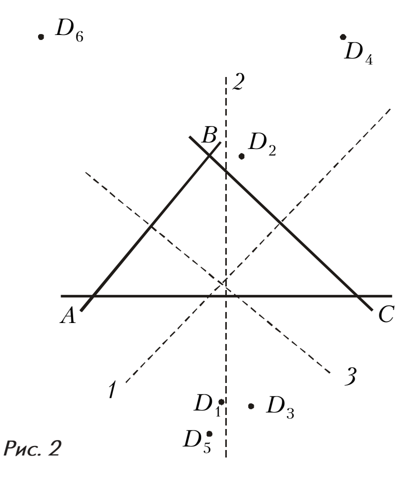

Рис. 2

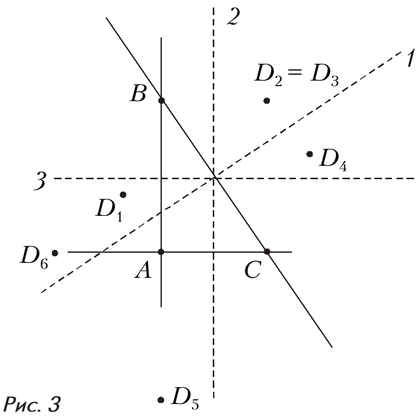

Рис. 3

требует и задача **2.2**: ось симметрии – либо одна из прямых AB, AC и BC, либо серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC. Поэтому если треугольник ABC непрямоугольный, то возможно шесть вариантов расположения точки D (рис.2), а если прямоугольный, то только пять вариантов (рис.3).

По-настоящему элегантна задача **2.3**. Хотя ее никто не решил, всем очень понравилось, что

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)>a^2+b^2.$$

Увеличиваясь, сумма квадратов никогда не вернется к своему первоначальному значению!

Третий тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

3.1. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = 2x - x^2$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках касания – параллелограмм.

3.2. Стороны a, b, c треугольника удовлетворяют неравенствам $a \le 2 \le \le b \le 3 \le c \le 4$. Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

3.3. Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем последовательно вычеркнули каждое второе число, т.е. 2, 4, …, 1510, 1, 5, 9, …, и так до тех пор, пока не осталось только одно число. Какое число осталось?

Задача **3.1** не требовала нахождения координат точек касания (хотя найти их не так уж сложно). Суть в том, что уравнения парабол имеют равные по модулю и противоположные по знаку коэффициенты при x^2, поэтому параболы симметричны относительно некоторой точки. Эта точка – центр симметрии четырехугольника с вершинами в точках касания – является серединой отрезка, соединяющего вершину параболы $y = x^2 + 4$ – точку $(0; 4)$ – с вершиной параболы $y = -x^2 + 2x$ – точкой $(1; 1)$. Середину найти легко:

$$\left(\frac{0+1}{2};\frac{4+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right).$$

Задача **3.2** тоже легкая: площадь треугольника не может быть больше половины произведения его сторон (объяснять это можно по-разному, например можно сослаться на формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\le\frac{1}{2}ab$, поскольку синус никогда не бывает больше 1). Следовательно,

$$S\le\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3.$$

Наибольшего значения площадь достигает в случае, когда рассматриваемый треугольник прямоугольный с катетами 2 и 3. Тогда гипотенуза равна $\sqrt{4+9}<4$. Итак, треугольник со сторонами 2, 3 и $\sqrt{13}$ удовлетворяет неравенствам задачи; наибольшее возможное значение площади равно 3.

Задачу **3.3** никто не решил. А она весьма любопытна: в книге Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Паташника «Конкретная математика» ей посвящен целый параграф и присвоено имя древнего историка Иосифа Флавия, участвовавшего в практическом решении похожей задачи.

Давайте рассмотрим общий случай. Пусть первоначально вдоль окружности расположено n чисел. Искомое число обозначим через $f(n)$. Тогда

$$f(2n)=2f(n)-1$$

и

$$f(2n+1)=2f(n)+1.$$

(На рисунках 4 и 5 эти формулы проиллюстрированы при $n = 6$.) Применяя эти рекуррентные соотношения, последовательно получаем: $f(1511) = 2f(755) + 1$; $f(755) = 2f(377) + 1$; $f(377) = 2f(188) + 1$; $f(188) = 2f(94) - 1$; $f(94) = 2f(47) - 1$; $f(47) = 2f(23) + 1$; $f(23) = 2f(11) + 1$; $f(11) = 2f(5) + 1$; $f(5) = 2f(2) + 1$; $f(2) = 2f(1) - 1$.

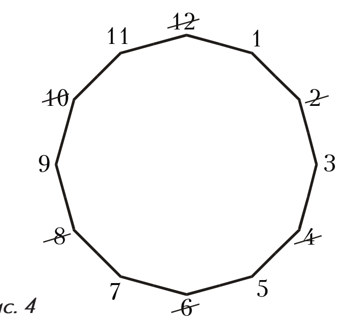

Рис. 4

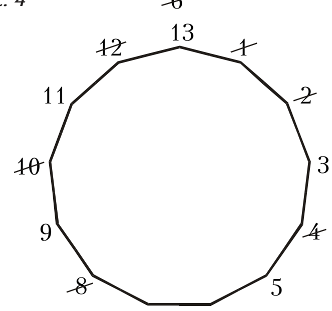

Рис. 5

Очевидно, $f(1) = 1$. Теперь легко находим: $f(2) = 1$; $f(5) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $f(11) = 2 \cdot 3 + 1 = 5$; …; $f(1511) = 975$. Мы получили ответ!

В общем случае, если $n = 2^k + m$, где $m < 2^k$, то останется число

$$f(n) = 2m + 1.$$

(Например, $1511 = 1024 + 487 = 2^{10} + 487$, и в нашем случае останется число $2 \cdot 487 + 1 = 975$. Все правильно!) Ключевой момент доказательства состоит в том, что $f\left(2^k\right) = 1$, а это непосредственно вытекает из соотношения $f(2n) = 2f(n) - 1$. В общем случае, когда $n = 2^k + m$, количество чисел сокращается до степени двойки после m вычеркиваний. Очередным числом в этот момент является $2m + 1$, оно и уцелеет!

Четвертый тур

(20 минут; каждая задача – 8 баллов)

4.1. Докажите, что ни при каких действительных a, b и c числа $(a-b)\left(ab-c^2\right)$, $(b-c)\left(bc-a^2\right)$, $(c-a)(ac-b^2)$ не могут быть одновременно положительными.

4.2. Длины некоторых шести сторон вписанного в окружность двенадцатиугольника равны $\sqrt{2}$, а длины каждой из шести других его сторон равны $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.

4.3. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n – натуральное число?

В задаче **4.1** можно разбирать случаи (рискуя не успеть!), а можно заметить, что сумма рассматриваемых чисел $(a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2) + (b^2c - bc^2 - a^2b + a^2c) + (ac^2 - a^2c - b^2c + ab^2)$ равна нулю, а сумма положительных чисел нулю равняться не может.

В задаче **4.2** независимо от способа чередования сторон многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например AB и BC (рис.6).

Соединим центр окружности с вершинами двенадцатиугольника. Возникнут два типа равнобедренных треугольников: бо-

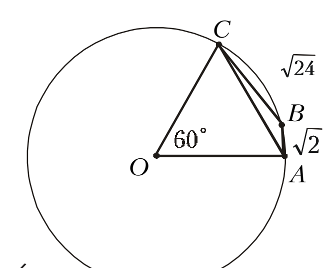

Рис. 6

ковые стороны у всех них одинаковы, а основания разные, у некоторых длиной $\sqrt{2}$, у других – $\sqrt{24}$. Поскольку треугольников разных типов поровну, то $\angle AOC = 360° : 6 = 60°$. Применяя свойство вписанного угла, находим

$$\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC = 150°.$$

Теперь применим теорему косинусов:

$$AC^2 = 2 + 24 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}\cos 150° = 38.$$

Поскольку треугольник AOC равносторонний, $AO = AC = \sqrt{38}$; задача решена.

В задаче **4.3** при $n = 1$, 2 и 3 значение выражения равно 10, 30 и 100 соответственно. Значит, двумя нулями сумма оканчиваться может.

Докажем, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно доказать, что при $n > 2$ эта сумма не кратна 8. Разумеется, $1^n = 1$; каждое из чисел 2^n и 4^n кратно 8, а число 3^n при делении на 8 дает либо остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, сумма $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при делении на 8 дает остаток 4 или 2 и поэтому не кратна 8.

Пятый тур

(25 минут; каждая задача – 9 баллов)

5.1. Найдите множество возможных значений выражения $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, где α, β и γ – величины углов треугольника.

5.2. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников PBC, PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.3. Сколько раз в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, присутствует число 1511?

Первое, что приходит в голову, когда видишь задачу **5.1** – тригонометрические преобразования:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos(180° - \alpha - \beta) =$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 =$$
$$= 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 1.$$

Синусы половин углов треугольника – положительные числа, поэтому $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1$.

Оценку снизу мы получили. Труднее получить оценку сверху. Оказывается,

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \le \frac{1}{8},$$

так что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{4}$. (Равенство выполнено для равностороннего треугольника.) Для знатока геометрии это не представляет труда:

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = r/(4R) \le 1/8,$$

где r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Впрочем, знаток и преобразованиями заниматься не стал бы, а сразу вспомнил бы формулу задачи 38 из 12-й главы «Задач по планиметрии» В.Прасолова:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = (r + R)/R,$$

после чего остается лишь заметить, что $0 < r < R/2$.

Разумеется, жюри не рассчитывало на такое решение. Надеялись, что кто-то догадается рассмотреть неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

и, поскольку

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1,$$

записать:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le$$
$$\le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 \le \frac{3}{2},$$

так как $x(1-x) \le 1/4$ при любом значении x, в частности при $x = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. После регаты выяснилось, что несколько команд успели придумать это решение, но слишком поздно: ни одна не успела его оформить.

Тем более никто не нашел способ, использующий скалярное произведение векторов. В этом замечательном решении главное – построить векторы единичной длины, перпендикулярные сторонам рассматриваемого треугольника. Если обозначить эти векторы буквами $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ (рис.7), то

$$0 \le \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)^2 =$$
$$= \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}\vec{y} + 2\vec{y}\vec{z} + 2\vec{z}\vec{x} =$$
$$= 1 + 1 + 1 - 2\cos\gamma - 2\cos\alpha - 2\cos\beta,$$

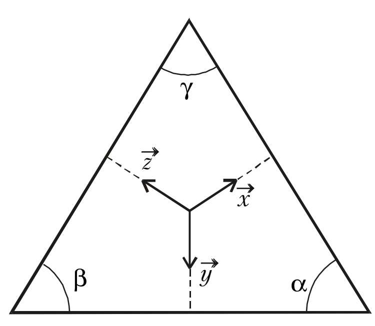

Рис. 7

откуда и получаем требуемое неравенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2$.

Задачу **5.2** почти все команды решили, применив обратную теорему Чевы. А именно, они записали для каждого из треугольников PBC, PAC и PAB свойство биссектрисы:

$$BA_1/A_1C = BP/PC,\ CB_1/B_1A = CP/PA,$$
$$AC_1/C_1B = AP/PB$$

и вычислили:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BP}{PC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AP}{PB} = 1.$$

Жюри знало и другое решение. Если отложить на лучах PA, PB и PC от точки P отрезки PA_2, PB_2 и PC_2 равной длины, то получим тетраэдр $PA_2B_2C_2$. Лучи PA_1, PB_1 и PC_1 пересекают ребра его основания в серединах. Осталось заметить, что медианы треугольника $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, а отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются образами этих медиан при проецировании треугольника $A_2B_2C_2$ из центра P на треугольник ABC.

Задачу **5.3** решили почти все команды, раскрыв знак целой части:

$$1511 \le \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512,$$

а затем не убоявшись вычислений:

$$1510{,}5 \le \sqrt{2n} < 1511{,}5,$$

$$2281610{,}25 \le 2n < 2284632{,}25,$$

$$1140805{,}125 < n < 1142316{,}125.$$

Учитывая, что n – натуральное число, имеем $1140805 < n \le 1142316$. Этому неравенству удовлетворяют 1142316 – 1140805 = 1511 натуральных чисел. Значит, ровно 1511 членов последовательности a_n равны 1511.

На обобщения времени на регате нет, но как только работы были сданы, все поняли, что последовательность, заданная в условии, – это последовательность 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; ... Каждое натуральное число n встречается в ней n раз.

Поскольку $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, для доказательства этого замечательного свойства последовательности достаточно проверить, что ее член с номером $n(n+1)/2$ не превышает n, а следующий член уже не меньше чем $n + 1$. Проверка проста:

$$\sqrt{n(n+1)} + \frac{1}{2} < \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} =$$
$$= n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = n + 1$$

и

$$\sqrt{n(n+1)+2} + \frac{1}{2} > \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = n + 1.$$

Публикацию подготовили
А.Блинков, В.Спиров