Прогулки короля

И.АКУЛИЧ

В 1973 ГОДУ, БУДУЧИ ДЕВЯТИклассником и участником Всесоюзной математической олимпиады, я боролся с одной задачей (автор ее – А.Ходулев). За прошедшие годы условия и решения остальных задач олимпиады постепенно потускнели и стерлись из моей памяти, а она – сохранилась. Это настоящий шедевр: изящное условие, очень естественное, «этюдное» решение. Такое не забывается!

Впрочем, судите сами.

Задача. *Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле. Когда соединили отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, получили замкнутую ломаную без самопересечений. Какое наибольшее и какое наименьшее число диагональных ходов мог иметь путь короля?*

Насчет *наименьшего* числа все ясно: оно равно нулю, и пример построить проще простого (рис.1). Эту часть задачи я осилил.

А вот найти наибольшее – не смог. Точнее, я нарисовал маршрут, в котором 36 диагональных ходов (рис.2), но не сумел доказать, что этот маршрут наилучший. Так и написал: «У меня больше не получилось». Жюри поставило за это оценку «∓» (что-то вроде двойки с плюсом).

Как же доказать, что замкнутый несамопересекающийся маршрут короля содержит не более 36 диагональных ходов? Оказывается, надо рассмотреть последовательные выходы A и B короля на границу доски. Если поля A и B не соседние (рис.3), то путь от A до B разбивает поле на две части. Всякая ломаная, соединяющая клетки из разных частей, пересекает путь AB, что ведет к самопересечению пути короля. Поэтому A и B – соседние поля. Поскольку цвета этих полей разные, а при ходах по диагонали цвет не меняется, то между двумя соседними выходами на границу должен быть и «прямой» ход. Поскольку граничных полей 28, выходов на границу тоже 28, и «прямых» ходов не меньше 28. Тогда диагональных – не больше чем 64 – – 28 = 36. Задача решена![1]

Вторым по силе чувством после очарования была досада: как же не додумался до такого естественного и короткого решения! А через четверть века вдруг возникли следующие вопросы (и опять непонятно, почему не раньше): в задаче рассмотрен замкнутый самопересекающийся путь короля, который по одному разу побывал на всех клетках доски. А что будет, если путь незамкнутый? Или самопересекающийся?

[1] *Между прочим, из формулы Пика*

$$S = i + b/2 - 1$$

для площади S многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, где i – количество узлов, расположенных строго внутри многоугольника, а b – количество узлов, расположенных на границе, следует, что любой замкнутый несамопересекающийся путь короля ограничивает площадь (в клетках) $S = 0 + 64/2 - 1 = 31$. (Подробности – в статье Н.Васильева «Вокруг формулы Пика», Приложение к журналу «Квант» №2 за 1998 год.)

Так задача Ходулева породила еще несколько новых. Первой из них поддалась задача, в которой путь короля несамопересекающийся и незамкнутый (пример такого маршрута – на рисунке 4, где король сделал 49 диагональных ходов).

Как доказать, что число 49 максимально возможное? Очень просто. Назовем *узлом* общую точку четырех клеток шахматной доски. Всего узлов, очевидно, 49. Каждый диагональный ход проходит через узел, а два раза пройти через узел без самопересечения пути невозможно. Все!

Дальше я занялся самопересекающимся незамкнутым маршрутом. Помучиться пришлось изрядно. Краткостью и красотой найденное мною решение не обладает. Поэтому изложу его мелким шрифтом.

Король сделал всего 63 хода. Очевидно, диагональные ходы не меняют цвет поля, на котором находится король, а каждый «прямой» (т.е. вертикальный или горизонтальный) ход приводит к переходу с одного цвета на другой. Таким образом, весь путь короля состоит из нескольких цепочек полей одного цвета, соединенных между собой «прямыми» ходами. (Цепочка может состоять из единственного поля; все ходы внутри одной цепочки – диагональные.)

Докажем, что число белых цепочек не меньше чем 4. Для этого разобьем все возможные ходы, соединяющие белые поля, на группы, как показано на рисунке 5. Из этих девяти групп шесть имеют вид креста, две расположены в левом нижнем и в правом верхнем углах доски и одна – в центре.

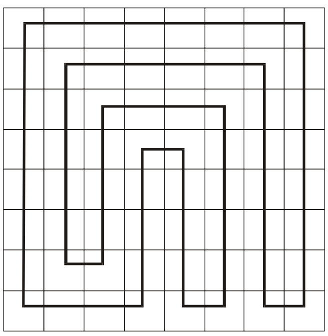

Рис. 1

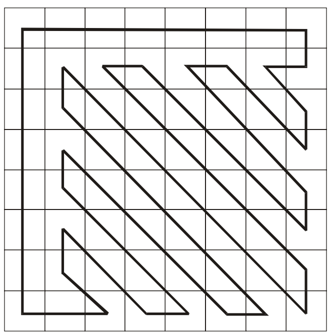

Рис. 2

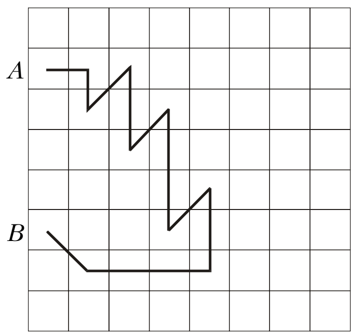

Рис. 3

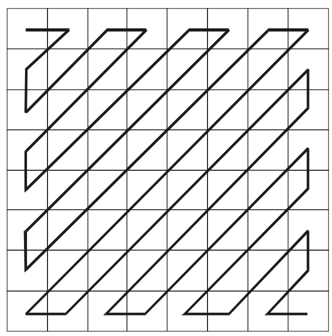

Рис. 4

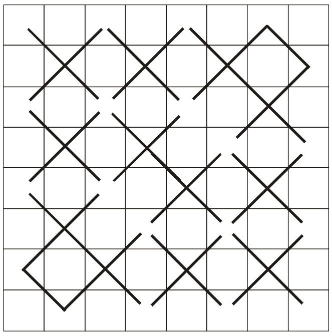

Рис. 5

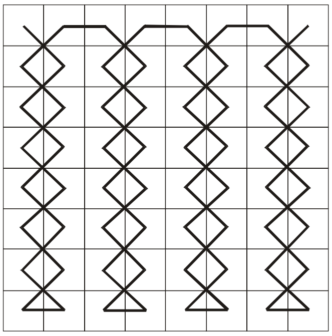

Рис. 6

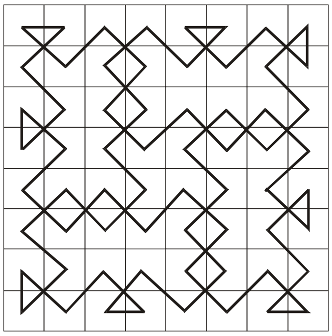

Рис. 7

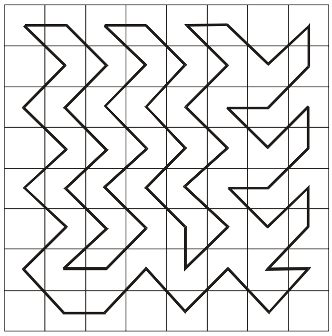

Рис. 8

Очевидно, путь короля не может пройти более чем по двум отрезкам любого креста. Не может пройти он и более чем по пяти отрезкам любой из угловых групп, как и более чем по шести отрезкам центральной группы.[2] Значит, всего в путь короля входит самое большее $6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 6 = 28$ белых диагональных ходов.

Если путь короля состоит из k белых цепочек, состоящих, соответственно, из n_1, n_2, …, n_k клеток, то $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 32$ (общее число белых полей). При прохождении этих цепочек король делает, соответственно, $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, …, $n_k - 1$ диагональных ходов. Поэтому общее число белых диагональных ходов короля равно

$$\left(n_1 - 1\right) + \left(n_2 - 1\right) + \ldots + \left(n_k - 1\right) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = 32 - k.$$

Как мы уже знаем, это число не превосходит 28. Значит, $32 - k \leq 28$, откуда $k \geq 4$.

Итак, белых цепочек не менее чем 4. Аналогично, черных цепочек тоже не менее чем 4. Значит, общее число цепочек не меньше 8 и число объединяющих их воедино «прямых» ходов не меньше $8 - 1 = 7$. Следовательно, число диагональных ходов не превосходит $63 - 7 = 56$. Путь, содержащий ровно 56 диагональных ходов, легко предъявить (рис.6). Долго ли, коротко ли, но и эта задача решена.

Теперь на очереди – замкнутый самопересекающийся маршрут. Ясно, что наши рассуждения о цепочках применимы и здесь, так что число диагональных ходов не превышает того же числа 56 (с той лишь разницей, что «прямых» ходов здесь не менее 8, а не 7, а всех ходов – 64, а не 63).

Но существует ли такой маршрут, в котором 56 диагональных ходов? В поисках его, изрисовав много бумаги, я обнаружил замысловатый «орнамент» (рис.7). В нем (подсчитайте, если не верите на слово) ровнешенько 56 диагональных ходов. Ура?

Как бы не так! На самом деле это не один, а два замкнутых маршрута. Правда, их легко «сцепить», заменив в одном месте пару пересекающихся диагоналей парой «прямых» ходов, но тогда получится маршрут всего лишь с 54 диагональными ходами.[3]

Итак, мне не удалось найти маршрут с 56 диагональными ходами, но не удалось и доказать, что его нет. Вся надежда – на читателей. Может быть, удастся применить компьютер, может быть, найдете какое-то ускользнувшее от меня соображение? (Если что-то придумаете – не забудьте сообщить об успехе в редакцию «Кванта»!)

Неожиданное развитие темы предложил А.Спивак. Давайте откажемся от необходимости обхода королем *всех* полей доски. Приведет ли это к увеличению максимально возможного числа диагональных ходов? Казалось бы, не должно: ведь чем меньше обойдено полей, тем меньше сделано ходов, а чем меньше ходов, тем меньше, казалось бы, и диагональных ходов.

Но давайте разбираться по порядку. В случае незамкнутого несамопересекающегося маршрута мы доказали, что число диагональных ходов не превосходит 49, причем в доказательстве нигде не использовалось требование о непременном обходе всех полей доски. Так что ответ здесь остается тем же: 49. Аналогично и для самопересекающихся маршрутов: мы убедились, что диагональных ходов каждого цвета (белых и черных) не более 28, так что всего их не более $28 \cdot 2 = 56$, чего мы успешно достигли для незамкнутого маршрута и почти достигли для замкнутого.

Однако совсем иной результат получается, если отказаться от обхода всех полей в исходной задаче Ходулева – для замкнутого несамопересекающегося пути короля. Здесь идея решения (о граничных полях) исчезает совершенно и потому число диагональных ходов может значительно превзойти 36. На рисунке 8 показан маршрут с 44 диагональными ходами. Но доказательства максимальности этого значения (как и уверенности в такой максимальности) у нас нет. Так что и здесь надеюсь на помощь читателей.

А вот еще одна задача о королевских прогулках.

На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Тот, после хода которого король окажется на поле, где уже побывал, проигрывает. Кто выиграет в такой игре, если оба играют наилучшим образом?

Оказывается, выигрывает начинающий, причем при любом исходном положении короля. Для этого ему надо мысленно разбить доску на прямоугольники, состоящие из двух соседних клеток (это можно сделать многими способами). Далее первым своим ходом он ставит короля на клетку, парную с той, на которой король находился изначально (т.е. на вторую клетку того же прямоугольника). Затем в ответ на каждый ход соперника он всегда ставит короля на клетку, парную той, на которой король в тот момент находится. Таким образом, после каждой пары ходов один прямоугольник окажется «использованным». Ясно, что рано или поздно соперник будет вынужден поставить короля на клетку, принадлежащую уже использованному прямоугольнику, и, таким образом, дважды посетить одно и то же поле.

* * *

Вот что такое по-настоящему хороша задача. Она живет своей жизнью, порождая другие задачи, заставляет нас размышлять над ней долгие годы.

---

[2] *Убедиться в этом чуть сложнее. Можете рассуждать так: в противном случае в маршрут не вошли бы самое большее два из всех диагональных ходов соответствующей группы, что явно (см. рис.5) приводит к повторному посещению королем одного и того же поля.*

[3] *Шахматная раскраска делает очевидным то, что невозможен замкнутый маршрут с 55 диагональными ходами (как невозможен и никакой замкнутый маршрут с нечетным числом диагональных ходов).*