$\angle LOA = \angle AOM$. Следовательно, поляры точек L и M образуют равные углы с полярой точки A (обдумайте это!). Вспомнив, что чья поляра, получаем: прямые BN и CN образуют равные углы с прямой BC. Попросту говоря, треугольник BNC равнобедренный, $BN = NC$.

Значит, точка N лежит на серединном перпендикуляре к прямой BC. Поляра к этому перпендикуляру как раз и является той точкой, через которую проходят всевозможные прямые LM.

2. Выполним полярное преобразование относительно вписанной в треугольник ABC окружности. Полярами точек A_1 и C_1 являются прямые BC и AB. Поляра прямой MN лежит на поляре точки B, т. е. на прямой A_1C_1.

Поскольку прямая MN параллельна A_1C_1, то поляры этих двух прямых и точка O лежат на одной прямой. Следовательно, поляра прямой MN – это точка B^* пересечения OB и A_1C_1 (рис.7).

Поляры точек M и N – это прямые AB^* и CB^*. Поэтому

$$\angle AB^*C = 180° - \angle MON,$$

так что задача свелась к доказательству того, что угол AB^*C тупой.

Проведем биссектрисы AO и CO до пересечения с прямой A_1C_1 в точках A^* и C^* соответственно.

Лемма. $\angle AA^*C = 90°$.

Доказательство. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle A^*OC = \angle OAC + \angle OCA$. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle C_1A_1C = \frac{1}{2}\left(360° - \angle C_1OA_1\right)$. Следовательно,

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 180° - \frac{1}{2}\left(180° - \beta\right),$$

где для краткости введены обозначения α, β, γ для углов треугольника ABC. Упростив полученное выражение, находим

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = 180°.$$

Значит, четырехугольник OA_1A^*C вписанный и по теореме о вписанном угле $\angle OA^*C = \angle OA_1C = 90°$.

Лемма доказана. Аналогичным образом можно доказать равенство $\angle OC^*A = 90°$.

Теперь решение упражнения не составляет труда: как мы только что доказали, точки A^* и C^* лежат на окружности с диаметром AC. Точка B^* лежит между ними и потому находится внутри окружности с диаметром AC. Последнее как раз и означает, что угол AB^*C тупой.

Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа

1. $A = 2R\Delta T \approx 5$ Дж. **2.** $Q = A + 3/2\, R\Delta T$.

3. $A_{12} = 2A - 3/2\, RT_1 = 935$ Дж. **4.** $\eta_1 = 2\eta/(1+\eta)$.

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

1. $\tau = (\pi + 2)\sqrt{R/g} \approx 69$ мин. **2.** $\omega_2 = \omega_1 R_1 \Big/ \left(\sqrt{2}R_2\right)$.

3. а) $T_1 = \sqrt{3/2}\,T_0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, $E_1 = E_0$;

б) $T_1 = \sqrt{3/2}\,T_0$, $\varphi_1 = \sqrt{2/3}\,\varphi_0$, $E_1 = 2/3\,E_0$.

4. $T = mv_0^2\big/(4k)$, где k – постоянная Больцмана;

$N = 8\sqrt{2\pi}\,\pi R^3 n_0 \big/ 3$.

5. $\sigma = \varepsilon_0\left(U_1 - U_2\right)\big/d \approx 9{,}4\cdot 10^{-7}$ Кл/м^2;

$m_1 = \varepsilon_0\left(U_1^2 - U_2^2\right)\big/\left(2gd^2\right) \approx 9{,}3\cdot 10^{-3}$ кг/м^2.

6. $d = 50L$. **7.** $B = (r\,\mathrm{tg}\,\theta)/q$. **8.** $I = I_0\left(1 + 9\pi^2/4\right)$.

Периодические дроби

(см. «Квант» №2)

2. Длина периода равна 6. При делении на 6 число 100 дает остаток 4. Поэтому сотая после запятой цифра такая же, как четвертая. *Ответ*: 5.

4. б) *Указание*. 0,(845) + 0,(49) = 0,(845845) + 0,(494949). Поскольку сумма 845845 + 494949 = 1 340794 – семизначное число, возникают переносы «в предыдущий период».

в) Очевидно, 2,70(584) = 2,705(845). Расширив периоды до длины, равной наименьшему общему кратному периодов слагаемых, получим: 2,705(845) + 6,917(49) = 2,705(845845) + + 6,917(494949) = 9,623(340795).

5. а) 0,(23); б) 0,(001234).

6. а) 0,(012) = 12/999 = 4/333; б) 3,1(3) = 3 + 0,1 + 0,0(3)= $= 3{,}1 + \frac{1}{10}\cdot 0{,}(3) = 3{,}1 + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{47}{15}$; в) 1,93(173) = 1,93 + $+ \frac{1}{10}\cdot 0{,}(173) = 1{,}93 + \frac{1}{10}\cdot\frac{173}{999} = 9649/4995$.

7. *Указание*. Сумма (произведение, разность) двух обыкновенных дробей (рациональных чисел) – обыкновенная дробь.

8. *Указание*. Сначала напишите все те цифры, которые входят в запись конечное число раз. А затем – те, которых бесконечно много (составив из них период).

9. $0{,}(692307) = 7{,}(692307) - 7 = \frac{100}{13} - 7 = \frac{9}{13}$.

10. а) $\frac{12}{85} = \frac{24}{170} = \left(1 + \frac{7}{17}\right) : 10 =$

$= 0{,}1(4117647058823529)$;

б) $\frac{3}{68} = \frac{75}{1700} = \left(4 + \frac{7}{17}\right) : 100 =$

$= 0{,}04(4117647058823529)$.

11. в) *Указание*. Поскольку $k \ge 3$, то $n \ge 3\cdot 2^c$.

12. Предположим противное: пусть $n \le 100$ и дробь m/n содержит цифры 167 в своей десятичной записи. Тогда, домножив дробь на степень десятки и вычтя образовавшуюся целую часть, получим дробь, в которой цифры 167 идут сразу после запятой. Домножим такую дробь на 6. Поскольку 167 · 6 = = 1002 и 168 · 6 = 1008, получим число, которое больше 1 и меньше 1,008 < 1,01. При умножении на n получаем (целое!) число, которое больше n и меньше $n + 0{,}01n \le n + 1$. Но такого целого числа не существует. Противоречие.

13. $\left[\frac{100}{6}\right] = 16$.

14. Число $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ кратно 7 тогда и только тогда, когда n кратно 6. Число 111111 кратно и 11, и 13, и 15873 (=111111/7).

15. При k, кратных 6.

16. *Указание*. Подумайте, что происходит при делении «уголком». *Ответ*: $n = 2$, а m – четное число.

17. а) По условию, $10^n - 1$ не кратно числу p, а $10^{2n} - 1 = \left(10^n - 1\right)\left(10^n + 1\right)$ кратно p. Следовательно, $10^n + 1$ кратно p. Пусть $1/p = \left(10^n a + b\right)\Big/\left(10^{2n} - 1\right)$, где $0 \le a,\ b < 10^n$. Тогда $\left(10^n a + b\right)\Big/\left(10^n - 1\right) = \left(10^n + 1\right)\big/p$ – целое число. Поскольку