$=\left(10^6\right)^k\cdot 10^4+3\equiv 1\cdot 3^4+3=84\equiv 0\pmod 7$. в) *Указание.* Пусть p – простой делитель числа $ab+c$. Существует бесконечно много таких натуральных n, что $b^n\equiv b\pmod p$.

13. Порядок числа a является делителем чисел r и s и потому является делителем числа НОД(r,s).

14. При k, кратных 18.

16. Например, $k=\varphi\left(10^{100}\right)$.

18. *Указание.* $2^6+6^2=100$. Докажите, что если число n обладает нужным свойством, то число $n+100$ тоже обладает им.

19. При $p=2$ годится любое четное n. Пусть $p>2$ и $n=(p-1)m$. Тогда $2^n\equiv 1$ и $n\equiv -m\pmod p$, так что в качестве m можно взять любое натуральное число вида $m=ps-1$, где $s=1, 2, 3, \ldots$

21. а) 20; б) 20.

22. а) *Указание.* Поскольку 2000 делится и на $\varphi\left(2^4\right)=8$, и на $\varphi\left(5^4\right)=4\cdot 5^3$, имеем: $3^{2000}\equiv 1$ и по модулю 2^4, и по модулю 5^4. Следовательно, $3^{2000}\equiv 1\pmod{10000}$. *Ответ*: $3^{1999}=\ldots 6667$.

б) Поскольку $\varphi\left(5^4\right)=5^3\cdot(5-1)=500$, то $2^{2000}=\left(2^{500}\right)^4\equiv 1\equiv -624\pmod{5^4}$, так что $2^{1999}\equiv -624/2=-312\equiv 313\pmod{5^4}$. Осталось подобрать такое целое x, что $313+625x$ делится на 16. Это легко: $313=320-7\equiv -7$ и $625=624+1\equiv 1\pmod{16}$, так что годится $x=7$. Значит, 2^{1999} оканчивается теми же четырьмя цифрами, что и число $313+625\cdot 7=4688$.

в) *Указание.* $10000=16\cdot 625$. Число $2^{3^{2000}}$ кратно 16. В силу теоремы Эйлера, остаток от деления 3^{2000} на 500 равен 1; поскольку $\varphi(625)=500$, имеем: $2^{3^{2000}}\equiv 2\pmod{625}$. Осталось подобрать такое целое x, что $2+625x$ делится на 16.
Ответ: 8752.

23. Достаточно разобрать случай $x\neq y$. Поскольку $1998=2\cdot 3^3\cdot 37$, достаточно доказать отсутствие решений в натуральных взаимно простых числах x, y, где $x\neq y$, и целых неотрицательных числах a, b, c уравнения $x^7+y^7=2^a\cdot 3^b\cdot 37^c$. Обозначим $N=2^a\cdot 3^b\cdot 37^c$ и $f=\varphi(N)$. Поскольку f не делится на 7, существует такое натуральное число t, что $7t\equiv 1\pmod f$.

Возводя сравнение $x^7\equiv -y^7\pmod N$ в t-ю степень, получаем: $x^{7t}\equiv\left(-y^7\right)^t$. Очевидно, число t нечетно (ибо f четно). Поэтому $x\equiv x^{7t}\equiv\left(-y^7\right)^t=-y^{7t}\equiv -y\pmod N$, так что $x+y$ делится на $N=x^7+y^7$, что невозможно из-за неравенства $x+y<x^7+y^7$.

24. Пусть $k-1$ делится на 2^s и не делится на 2^{s+1}. Предположим, что при всех достаточно больших натуральных l число $p=2^{2^l}+k$ простое. Очевидно, если $2^l>s$, то $p-1=2^{2^l}+k-1=2^s h$, где h нечетно.

В силу теоремы Эйлера, $2^{\varphi(h)}\equiv 1\pmod h$. Поэтому $2^{s+\varphi(h)}\equiv 2^s\pmod{2^s h}$. Следовательно, при $l\geq s$ имеем $2^{l+\varphi(h)}\equiv 2^l\pmod{p-1}$.

В силу малой теоремы Ферма,

$$2^{2^{l+\varphi(h)}}+k\equiv 2^{2^l}+k\equiv 0\pmod p.$$

Поскольку $2^{2^{l+\varphi(h)}}+k>2^{2^l}+k=p$, то число $2^{2^{l+\varphi(h)}}+k$ составное. Задача решена.

25. а) $n=1$, p^m или $2p^m$, где p – простое, m – натуральное.

26. а) *Ответ*: $x\equiv\pm a$ или $2^{m-1}\pm a\left(\bmod 2^m\right)$. *Указание.* Поскольку $(x+a)-(x-a)=2a$, числа $x-a$ и $x+a$ не могут оба делиться на 4. Значит, либо одно из них делится на 2^m, либо одно делится на 2^{m-1}, а другое четно.

27. *Указание.* Докажите по индукции сравнения $5^{2^{m-3}}\equiv 1+2^{m-1}\left(\bmod 2^m\right)$, где $m\geq 3$, и $(1+p)^{p^{m-2}}\equiv 1+p^{m-1}\left(\bmod p^m\right)$, где p – нечетное простое, $m\geq 2$.

28. г) Всякое натуральное число вида $6m-1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p=6k-1$. Пусть a^2+a+1 кратно p. Тогда $a^3-1=(a-1)\left(a^2+a+1\right)$ тоже кратно p. Если $a\equiv 1\pmod p$, то $a^2+a+1\equiv 1^2+1+1=3$, что невозможно, ибо $p\neq 3$. Значит, порядок числа a по модулю p равен 3, откуда $p-1$ кратно 3. Но $p-1=6k-2$ не кратно 3.

29. *Указание.* $a^{12}-1=\left(a^6-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)$.

30. в) *Указание.* $a^{15}-1=(a-1)\left(a^2+a+1\right)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)\times\left(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1\right)$.

31. *Указания.* а) В силу предыдущего упражнения $a+1\equiv -a^2\pmod p$. б) Докажите, что $a^3-a^2+a-1\equiv a^4\pmod p$.

33. *Указание.* Существует такое целое c, что $bc\equiv 1\pmod p$. Число $(ac)^{2^n}+1$ кратно p.

34. *Указание.* Если p – простой общий делитель чисел n и $a^{2^n}+1$, то $p\leq n$ и $p=2^{n+1}k+1>2^{n+1}>n$.

35. а) Пусть n четно и a^n+1 делится на $n+1$. Записав $n=2^m k$, где k – нечетное, имеем: любой простой делитель числа $a^n+1=\left(a^k\right)^{2^m}+1$ сравним с 1 по модулю 2^{m+1}. Поскольку произведение чисел, сравнимых с 1 по модулю 2^{m+1}, тоже сравнимо с 1 по этому модулю и поскольку $n+1=2^m k+1\not\equiv 1\left(\bmod 2^{m+1}\right)$, получаем противоречие.
Итак, n нечетно. Теперь очевидно, что a тоже нечетно.

б) *Указание.* Рассмотрите $n=a^{a^m}$.

36. а) Следует из предыдущего упражнения. б) Убедитесь, что если 2^n+2 кратно n и если 2^n+1 кратно $n-1$ (это верно, например, для $n=2$), то $2^{2^n+2}+2$ кратно 2^n+2 и $2^{2^n+2}+1$ кратно 2^n+1.

37. Пусть $15a+16b=r^2$ и $16a-15b=s^2$, где r, s – натуральные числа. Тогда $r^4+s^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=\left(15^2+16^2\right)\left(a^2+b^2\right)=13\cdot 37\cdot\left(a^2+b^2\right)$. Поскольку число 13 не имеет вида $8k+1$, а r^4+s^4 делится на 13, то $r\equiv s\equiv 0\pmod{13}$.
Аналогично, $r\equiv s\equiv 0\pmod{37}$.
Ответ: $13^2\cdot 37^2$ (при $a=13\cdot 37\cdot 31$, $b=13\cdot 37$).

39. Примените утверждение предыдущего упражнения:
а) при $a=8$; б) при $a=512$.

40. Достаточно разобрать случай $a\neq b$. Числа a и b нечетны. Обозначим буквой n их наименьшее общее кратное. Тогда 2^n+1 кратно числу 2^a+1, которое кратно числу b. Аналогично, 2^n+1 кратно 2^b+1, которое кратно a. Значит, 2^n+1 кратно как a, так и b, а следовательно, и их наименьшему общему кратному n. Поскольку $n>3$, то, в силу пункта а) предыдущего упражнения, n кратно 9.
Предположим для определенности, что a не кратно 3. Тогда легко проверить, что 2^a+1 не делится на 9. Это противоречит тому, что b делится на 9.

41. *Указание.* Пусть $n>3$ и 2^n+1 кратно n^2. Представим n в виде $n=3^a m$, где m не кратно 3. Тогда $a>1$. Индукцией