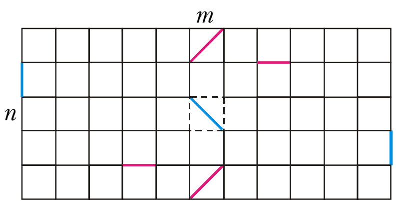

Рис. 2

или $k = 1$. Оба значения реализуются, например, $k = -1$ при $(2, -2)$ и $k = 1$ при $(2, 2)$.

Ответ: число k равно одному из чисел -1, 0, 1.

12. Приведем решение для доски $m \times n$ клеток, где m и n – нечетные натуральные числа. Первый ход первого игрока должен быть «несимметричным»: выберем на доске центральную клетку и проведем в ней одну из диагоналей. Все последующие ходы первого игрока должны быть симметричными ходам второго игрока относительно центра доски (рис.2). Ясно, что первый игрок не нарушит условие игры ранее второго игрока.

Если число клеток по одной стороне четно, а по другой – нечетно, то начинающему следует провести центральный отрезок на оси прямоугольника и далее играть аналогично, как в случае нечетных m и n.

Рассмотрим случай четных m и n. Пусть $m = 2k$, $n = 2d$. Тогда число клеток в прямоугольнике $m \times n$ четно и число всех отрезков, проходящих по сторонам клеток (не по диагоналям клеток), равное $2k(2d + 1) + 2d(2k + 1)$, тоже четно. Учитывая то, что в каждой клетке может быть проведена только одна диагональ и дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, второй игрок должен придерживаться следующей стратегии: если начинающий игрок проводит отрезок по некоторой стороне квадрата, то второй игрок тоже должен провести любой отрезок по свободной стороне квадрата; если начинающий игрок проводит отрезок по диагонали квадрата, то второй игрок тоже проводит любой свободный диагональный отрезок и т.д. Очевидно, второй игрок может всегда обеспечить себе ход и, следовательно, в этом случае он выигрывает.

Ответ: при правильной игре выигрывает первый игрок, если хотя бы одно из значений m и n нечетное, и второй игрок – если m и n четные.

13. Преобразуем алгебраическую сумму

$$y^4x^3 + z^4y^3 + x^4z^3 - x^4y^3 - y^4z^3 - z^4x^3$$

к виду

$$(x-y)(z-y)(x-z) \times$$

$$\times\left[x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + xyz(x+y+z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(x-y)(z-y)(x-z) \times$$

$$\times\left[x^2(y+z)^2 + y^2(x+z)^2 + z^2(x+y)^2\right].$$

Это выражение равно нулю только тогда, когда среди чисел x, y, z есть два равных (выражение в квадратных скобках равно нулю лишь тогда, когда по крайней мере два из трех чисел x, y, z равны нулю).

14. Заметим, что число, дающее при делении на 6 остаток 5, во-первых, должно быть нечетным, во-вторых, – при делении на 3 давать остаток 2.

Попытаемся сконструировать такое число, приписывая к числу 1 справа последовательные натуральные числа. Поскольку искомое число должно быть нечетным, то каждый раз нам придется приписывать по 2 очередных натуральных числа, старшее из которых – число нечетное. Остаток от деления на 3 полученного числа оценим по сумме его цифр. Несложно показать, что остатки от деления на 3 сцепки из каждой пары натуральных чисел, начиная с 2, образуют периодическую последовательность: 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, … Таким образом, после приписывания каждой такой пары сумма цифр полученного числа при делении на 3 будет давать остатки 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, … В этой периодической последовательности нет числа 2. Следовательно, среди вводимых чисел не найдется числа, дающего при делении на 6 остаток 5, и Гадалка никогда не предскажет «к черту пошлет».

15. Покажем, что испытуемых «пятерок» должно быть не менее 18. Пронумеруем всех игроков от 1 до 18. Игрока с номером 1 нужно испытать в паре с 17 другими игроками. Поскольку в каждой «пятерке» он может образовать только 4 различных пары, то для этого его нужно включить в состав не менее чем 5 «пятерок». Точно так же любой из 18 игроков должен выходить на игровое поле не менее 5 раз. Это возможно лишь в том случае, когда количество «пятерок» не менее 18.

Один из возможных наборов из 18 «пятерок» показан в таблице:

№ «пятерки»	*Состав игроков*																	
1						6	7			10					15		17	
2						6		8				12	13					18
3						6			9		11			14		16		
4					5				9	10				14				18
5					5		7					12			15	16		
6					5			8			11		13				17	
7				4				8				12		14			17	
8				4			7			10			13			16		
9				4					9		11				15			18
10			3					8		10					15	16		
11			3						9			12	13				17	
12			3				7				11			14				18
13	1	2														16	17	18
14	1	2											13	14	15			
15	1	2								10	11	12						
16	1	2					7	8	9									
17		2	3	4	5	6												
18	1		3	4	5	6												

Малая теорема Ферма

1. а) В последовательности 2, 4, 8, $16 \equiv 3$, 6, 12, $24 \equiv 11$, $22 \equiv 9$, $18 \equiv 5$, 10, $20 \equiv 7$, $14 \equiv 1$ встречаются все остатки от 1 до 12.

2. а) 2 и 3; б) числа вида $3 + 7k$ и числа вида $5 + 7k$, где k – целое.

3. Нельзя. Составное число n делится на некоторое простое число $q < n$. Рассмотрим то место на окружности, где находится q, и возьмем q в качестве первого из трех чисел a, b, c. Имеем:

$$b^2 \equiv ac \equiv 0 \pmod{q},$$

так что b делится на q. Двигаясь далее вдоль окружности и рассуждая аналогично, придем к абсурду: все числа 1, 2, … …, $n - 1$ должны делиться на q.

5. *Указание*. Во-первых, $2^n \equiv 3 \pmod{5}$ при $n \equiv 3 \pmod{4}$. Во-вторых, $2^n \equiv 3 \pmod{13}$ при $n \equiv 4 \pmod{12}$. В первом случае n должно быть нечетным числом, а во втором – четным.

6. *Ответ*: $p = 13$.

9. б) $m = 1$ или 2.

10. Поскольку $a - b^n = \left(a - k^n\right) + \left(k^n - b^n\right)$ кратно $k - b$, то $a - b^n$ делится на любое натуральное число. Следовательно, $a - b^n = 0$, что и требовалось доказать.

11. а) Рассмотрим остатки от деления чисел 1, 11, 111, … на n. Какие-то два из них равны; разность соответствующих чисел кратна n; эта разность оканчивается на несколько нулей, которые можно отбросить, поскольку n взаимно просто с 10.

12. а) $8^n + 1 = \left(2^n\right)^3 + 1^3$ кратно числу $2^n + 1$; $5 \cdot 4^n + 1 = = 5 \cdot (3+1)^n + 1 \equiv 5 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. б) Таковы, например, числа вида $10^{12k+1} + 3 \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}$. Составными являются и все числа вида $10^{6k+4} + 3$, поскольку $10^{6k+4} + 3 =$