ковые стороны у всех них одинаковы, а основания разные, у некоторых длиной $\sqrt{2}$, у других – $\sqrt{24}$. Поскольку треугольников разных типов поровну, то $\angle AOC =$ $= 360° : 6 = 60°$. Применяя свойство вписанного угла, находим

$$\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC = 150°.$$

Теперь применим теорему косинусов:

$$AC^2 = 2 + 24 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}\cos 150° = 38.$$

Поскольку треугольник AOC равносторонний, $AO = AC = \sqrt{38}$; задача решена.

В задаче **4.3** при $n = 1$, 2 и 3 значение выражения равно 10, 30 и 100 соответственно. Значит, двумя нулями сумма оканчиваться может.

Докажем, что $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно доказать, что при $n > 2$ эта сумма не кратна 8. Разумеется, $1^n = 1$; каждое из чисел 2^n и 4^n кратно 8, а число 3^n при делении на 8 дает либо остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, сумма $1^n + 2^n +$ $+ 3^n + 4^n$ при делении на 8 дает остаток 4 или 2 и поэтому не кратна 8.

Пятый тур

(25 минут; каждая задача – 9 баллов)

5.1. Найдите множество возможных значений выражения $\cos\alpha + \cos\beta +$ $+\cos\gamma$, где α, β и γ – величины углов треугольника.

5.2. В тетраэдре $PABC$ проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников PBC, PAC и PAB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

5.3. Сколько раз в последовательности a_1, a_2, a_3, ..., заданной формулой $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$, присутствует число 1511?

Первое, что приходит в голову, когда видишь задачу **5.1** – тригонометрические преобразования:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos(180° - \alpha - \beta) =$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 =$$
$$= 4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 1.$$

Синусы половин углов треугольника – положительные числа, поэтому $\cos\alpha +$ $+\cos\beta + \cos\gamma > 1$.

Оценку снизу мы получили. Труднее получить оценку сверху. Оказывается,

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \le \frac{1}{8},$$

так что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{4}$. (Равенство выполнено для равностороннего треугольника.) Для знатока геометрии это не представляет труда:

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = r/(4R) \le 1/8,$$

где r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Впрочем, знаток и преобразованиями заниматься не стал бы, а сразу вспомнил бы формулу задачи 38 из 12-й главы «Задач по планиметрии» В.Прасолова:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = (r + R)/R,$$

после чего остается лишь заметить, что $0 <$ $< r < R/2$.

Разумеется, жюри не рассчитывало на такое решение. Надеялись, что кто-то догадается рассмотреть неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

и, поскольку

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1,$$

записать:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le$$
$$\le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 \le \frac{3}{2},$$

так как $x(1-x) \le 1/4$ при любом значении x, в частности при $x = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. После регаты выяснилось, что несколько команд успели придумать это решение, но слишком поздно: ни одна не успела его оформить.

Тем более никто не нашел способ, использующий скалярное произведение векторов. В этом замечательном решении главное – построить векторы единичной длины, перпендикулярные сторонам рассматриваемого треугольника. Если обозначить эти векторы буквами $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ (рис.7), то

$$0 \le \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)^2 =$$

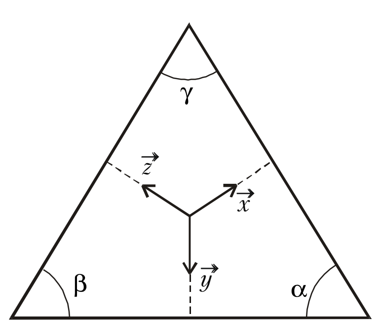

Рис. 7

$$= \vec{x}^{\,2} + \vec{y}^{\,2} + \vec{z}^{\,2} + 2\vec{x}\vec{y} + 2\vec{y}\vec{z} + 2\vec{z}\vec{x} =$$
$$= 1 + 1 + 1 - 2\cos\gamma - 2\cos\alpha - 2\cos\beta,$$

откуда и получаем требуемое неравенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2$.

Задачу **5.2** почти все команды решили, применив обратную теорему Чевы. А именно, они записали для каждого из треугольников PBC, PAC и PAB свойство биссектрисы:

$$BA_1/A_1C = BP/PC,\ CB_1/B_1A = CP/PA,$$
$$AC_1/C_1B = AP/PB$$

и вычислили:

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BP}{PC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AP}{PB} = 1.$$

Жюри знало и другое решение. Если отложить на лучах PA, PB и PC от точки P отрезки PA_2, PB_2 и PC_2 равной длины, то получим тетраэдр $PA_2B_2C_2$. Лучи PA_1, PB_1 и PC_1 пересекают ребра его основания в серединах. Осталось заметить, что медианы треугольника $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, а отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются образами этих медиан при проецировании треугольника $A_2B_2C_2$ из центра P на треугольник ABC.

Задачу **5.3** решили почти все команды, раскрыв знак целой части:

$$1511 \le \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < 1512,$$

а затем не убоявшись вычислений:

$$1510{,}5 \le \sqrt{2n} < 1511{,}5,$$

$$2281610{,}25 \le 2n < 2284632{,}25,$$

$$1140805{,}125 < n < 1142316{,}125.$$

Учитывая, что n – натуральное число, имеем $1140805 < n \le 1142316$. Этому неравенству удовлетворяют 1142316 – 1140805= = 1511 натуральных чисел. Значит, ровно 1511 членов последовательности a_n равны 1511.

На обобщения времени на регате нет, но как только работы были сданы, все поняли, что последовательность, заданная в условии, – это последовательность 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; ... Каждое натуральное число n встречается в ней n раз.

Поскольку $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, для доказательства этого замечательного свойства последовательности достаточно проверить, что ее член с номером $n(n+1)/2$ не превышает n, а следующий член уже не меньше чем $n + 1$. Проверка проста:

$$\sqrt{n(n+1)} + \frac{1}{2} < \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} =$$
$$= n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = n + 1$$

и

$$\sqrt{n(n+1)+2} + \frac{1}{2} > \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = n + 1.$$

Публикацию подготовили
А.Блинков, В.Спиров