

Рис. 3

требует и задача 2.2: ось симметрии – либо одна из прямых  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ , либо серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника  $ABC$ . Поэтому если треугольник  $ABC$  непрямоугольный, то возможно шесть вариантов расположения точки  $D$  (рис.2), а если прямоугольный, то только пять вариантов (рис.3).

По-настоящему элегантна задача 2.3. Хотя ее никто не решил, всем очень понравившись, что

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) > a^2 + b^2.$$

Увеличиваясь, сумма квадратов никогда не вернется к своему первоначальному значению!

### Третий тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

**3.1.** К параболам, заданным уравнениями  $y = x^2 + 4$  и  $y = 2x - x^2$ , проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках касания – параллелограмм.

**3.2.** Стороны  $a, b, c$  треугольника удовлетворяют неравенствам  $a \leq 2 \leq b \leq 3 \leq c \leq 4$ . Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

**3.3.** Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем последовательно вычеркнули каждое второе число, т.е. 2, 4, ..., 1510, 1, 5, 9, ..., и так до тех пор, пока не осталось только одно число. Какое число осталось?

Задача 3.1 не требовала нахождения координат точек касания (хотя найти их не так уж сложно). Суть в том, что уравнения парабол имеют равные по модулю и противоположные по знаку коэффициенты при  $x^2$ , поэтому параболы симметричны относительно некоторой точки. Эта точка – центр симметрии четырехугольника с вершинами в точках касания – является сере-

диной отрезка, соединяющего вершину параболы  $y = x^2 + 4$  – точку  $(0; 4)$  – с вершиной параболы  $y = -x^2 + 2x$  – точкой  $(1; 1)$ . Середины найти легко:

$$\left(\frac{0+1}{2}; \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Задача 3.2 тоже легкая: площадь треугольника не может быть больше половины произведения его сторон (объяснить это можно по-разному, например можно сослаться на формулу  $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \leq \frac{1}{2}ab$ , поскольку синус никогда не бывает больше 1). Следовательно,

$$S \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

Наибольшее значения площадь достигает в случае, когда рассматриваемый треугольник прямоугольный с катетами 2 и 3. Тогда гипотенуза равна  $\sqrt{4+9} < 4$ . Итак, треугольник со сторонами 2, 3 и  $\sqrt{13}$  удовлетворяет неравенствам задачи; наибольшее возможное значение площади равно 3.

Задачу 3.3 никто не решил. А она весьма любопытна: в книге Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Паташника «Конкретная математика» ей посвящен целый параграф и присвоено имя древнего историка Иосифа Флавия, участвовавшего в практическом решении похожей задачи.

Давайте рассмотрим общий случай. Пусть первоначально вдоль окружности расположено  $n$  чисел. Искомое число обозначим через  $f(n)$ . Тогда

$$f(2n) = 2f(n) - 1$$

и

$$f(2n+1) = 2f(n) + 1.$$

(На рисунках 4 и 5 эти формулы проиллюстрированы при  $n = 6$ .) Применяя эти рекуррентные соотношения, последователь-

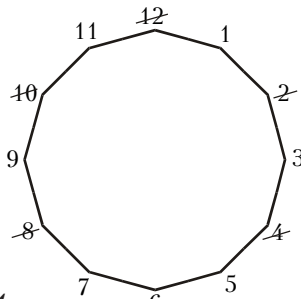


Рис. 4

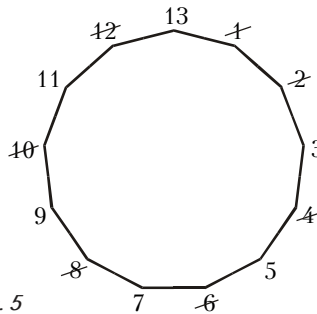


Рис. 5

но получаем:  $f(1511) = 2f(755) + 1$ ;  $f(755) = 2f(377) + 1$ ;  $f(377) = 2f(188) + 1$ ;  $f(188) = 2f(94) - 1$ ;  $f(94) = 2f(47) - 1$ ;  $f(47) = 2f(23) + 1$ ;  $f(23) = 2f(11) + 1$ ;  $f(11) = 2f(5) + 1$ ;  $f(5) = 2f(2) + 1$ ;  $f(2) = 2f(1) - 1$ .

Очевидно,  $f(1) = 1$ . Теперь легко находим:  $f(2) = 1$ ;  $f(5) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ ;  $f(11) = 2 \cdot 3 + 1 = 5$ ; ...;  $f(1511) = 975$ . Мы получили ответ!

В общем случае, если  $n = 2^k + m$ , где  $m < 2^k$ , то останется число

$$f(n) = 2m + 1.$$

(Например,  $1511 = 1024 + 487 = 2^{10} + 487$ , и в нашем случае останется число  $2 \cdot 487 + 1 = 975$ . Все правильно!) Ключевой момент доказательства состоит в том, что  $f(2^k) = 1$ , а это непосредственно вытекает из соотношения  $f(2n) = 2f(n) - 1$ . В общем случае, когда  $n = 2^k + m$ , количество чисел сокращается до степени двойки после  $m$  вычеркиваний. Очередным числом в этот момент является  $2m + 1$ , оно и уцелеет!

### Четвертый тур

(20 минут; каждая задача – 8 баллов)

**4.1.** Докажите, что ни при каких действительных  $a, b$  и  $c$  числа  $(a-b)(ab-c^2)$ ,  $(b-c)(bc-a^2)$ ,  $(c-a)(ac-b^2)$  не могут быть одновременно положительными.

**4.2.** Длины некоторых шести сторон вписанного в окружность двенадцатиугольника равны  $\sqrt{2}$ , а длины каждой из шести других его сторон равны  $\sqrt{24}$ . Найдите радиус окружности.

**4.3.** Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться значение выражения  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ , где  $n$  – натуральное число?

В задаче 4.1 можно разбирать случаи (рискуя не успеть!), а можно заметить, что сумма рассматриваемых чисел  $(a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2) + (b^2c - bc^2 - a^2b + a^2c) + (ac^2 - a^2c - b^2c + ab^2)$  равна нулю, а сумма положительных чисел нулю равняться не может.

В задаче 4.2 независимо от способа чередования сторон многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например  $AB$  и  $BC$  (рис.6).

Соединим центр окружности с вершинами двенадцатиугольника. Возникнут два типа равнобедренных треугольников: бо-

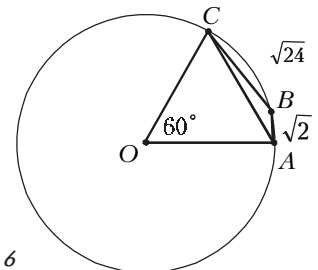


Рис. 6