При этом

$$A_{23} = RT_2 \frac{\left(V_3/V_2\right)^2 - 1}{2V_3/V_2} =$$

$$= RT_2 \frac{\left(V_3/V_4\right)^2 - 1}{2V_3/V_4} = RT_2 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}}$$

(по условию $p_3/V_3 = p_4/V_4$, следовательно, $T_1/V_4^2 = T_2/V_3^2$) и, аналогично,

$$A_{41} = RT_1 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}} .$$

Окончательно работа в цикле *1—2—3—4—1* равна

$$A = \frac{R\left(T_2 - T_1\right)^2}{2\sqrt{T_2 T_1}} .$$

Задача 4. *Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительное изменение его давления составило $\Delta p/p = 1/120$. Найдите работу, совершенную газом, если относительные изменения его температуры и объема оказались также малыми.*

По условию, изменение объема газа мало, поэтому для адиабатического процесса элементарная работа равна

$$A = p\Delta V = -C_V \Delta T .$$

Изменения давления Δp, объема ΔV и температуры ΔT связаны уравнением состояния

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T) .$$

Пренебрегая произведением малых величин $\Delta p \Delta V$, находим

$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T .$$

Исключим из последнего равенства $V\Delta p$ с помощью уравнения состояния:

$$V\Delta p = \frac{pV}{p}\Delta p = RT\frac{\Delta p}{p}$$

и воспользуемся выражением для работы:

$$A + RT\frac{\Delta p}{p} = \frac{R}{C_V}C_V\Delta T = -\frac{R}{C_V}A .$$

Окончательно получаем

$$A = \frac{C_V}{C_V + R}RT\frac{\Delta p}{p} = 12{,}5 \quad \text{Дж} .$$

(Читатель, знакомый с уравнением адиабаты для идеального газа, результат может получить с помощью этого уравнения и уравнения состояния.)

Задача 5. *Один моль одноатомного газа расширяется в изотермическом процессе 1—2, совершая работу A_{12}. Затем газ охлаждается в изобарическом процессе 2—3 и, наконец, в адиабатическом процессе 3—1 возвращается в исходное состояние (рис.4). Какую работу совершил газ в замкнутом цикле, если разность максимальной и минимальной температур в нем составила ΔT?*

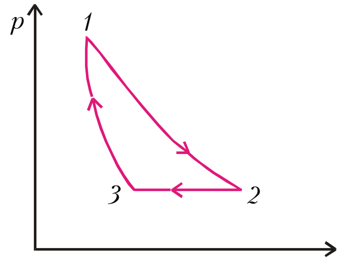

Рис. 4

Максимальная и минимальная температуры газа в цикле достигаются в адиабатическом процессе, так что $\Delta T = T_1 - T_3$. В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится от него, поэтому работа в цикле равна разности подведенного количества теплоты Q_{12} и отведенного Q_{23}. В изотермическом процессе подведенное количество теплоты равно совершенной газом работе:

$$Q_{12} = A_{12} ,$$

в изобарическом процессе отведенное количество теплоты составляет

$$Q_{23} = \left(C_V + R\right)\left(T_2 - T_3\right) = \left(C_V + R\right)\Delta T .$$

Итак, работа в цикле равна

$$A = A_{12} - \left(C_V + R\right)\Delta T = A_{12} - \frac{5}{2}R\,\Delta T .$$

Этот же результат можно получить, подсчитав алгебраическую сумму работ газа на всех трех участках цикла (в чем читатель может убедиться самостоятельно).

Задача 6. *Моль гелия из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в равновесное состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2—3 линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре 3—1 возвращают в исходное состояние (рис.5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессах 2—3 и 3—1 к газу в итоге было подведено количество теплоты $Q = 72$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$ и $V_2/V_3 = 3$.*

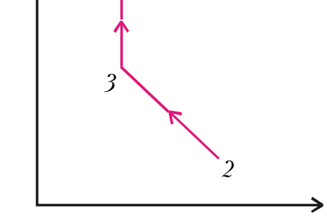

Рис. 5

Хотя процесс расширения *1—2* через турбину необратим, но, если начальное и конечное состояния равновесны, по закону сохранения энергии можно утверждать, что работа, совершенная в этом процессе, равна изменению внутренней энергии газа:

$$A_{12} = -C_V\left(T_2 - T_1\right) = C_V\left(T_1 - T_2\right) .$$

На участке сжатия *2—3* теплоемкость не остается постоянной, однако внутренняя энергия газа не изменяется ($T_2 = T_3$). Поэтому итоговое отведенное на этом участке количество теплоты численно равно работе сжатия:

$$Q_{23} = RT_2 \frac{\left(V_2/V_3\right)^2 - 1}{2V_2/V_3}$$

(см., например, задачу 2). Чтобы упростить дальнейшие выкладки, подставим отношение объемов $V_2/V_3 = 3$:

$$Q_{23} = \frac{4}{3}RT_2 .$$

На участке изохорического нагрева *3—1* к газу подводится количество теплоты

$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_3\right) = C_V\left(T_1 - T_2\right) .$$

По условию,

$$Q = Q_{31} - Q_{23} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) - \frac{4}{3}RT_2 ,$$

откуда находим

$$RT_2 = \frac{9}{17}RT_1 - \frac{6}{17}Q .$$

Окончательно для работы расширения через турбину имеем

$$A_{12} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) =$$

$$= \frac{12}{17}RT_1 + \frac{9}{17}Q \approx 625 \text{ Дж} .$$

Задача 7. *Найдите КПД цикла 1—2—3—1, проведенного с одним молем одноатомного газа и состоящего из участка линейной зависимости давления от объема (прямая 1—2 проходит через начало координат диаграммы p—V), изохоры 2—3 и изобары 3—1 (рис.6). Известно, что $p_2 = 2p_1 = 2p_0$, $V_3 = V_2 = 2V_1 = 2V_0$.*

Тепло подводится на участке *1—2*, где теплоемкость постоянна и равна $2R$ (см., например, задачу 1):

$$Q_1 = Q_{12} = 2R\left(T_2 - T_1\right) = 6p_0V_0 .$$