Поляры и теорема Паппа

Г.БАГДАСАРЯН

От редакции. *Студент Ереванского университета Григорий Багдасарян, призер международных математических олимпиад 1996 и 1997 годов, самостоятельно придумал любопытное геометрическое преобразование. Он не успел узнать, что оно известно науке под названием полярного преобразования, – погиб в озере Севан, спасая тонувшего брата.*

Для удобства читателей оригинальная терминология автора приведена в соответствие с общепринятой.

Для решения многих задач полезны параллельные переносы, повороты, осевые симметрии и другие геометрические преобразования. Они переводят точки в точки. Но иногда оказывается полезным преобразование, переводящее точки в прямые, а прямые – в точки.

Чтобы перейти к точным формулировкам, зафиксируем на плоскости окружность ω с центром O и радиусом r. *Полярой* точки A, где $A \neq O$, назовем прямую, перпендикулярную прямой AO и проходящую на расстоянии r^2/OA от точки O.

Полярой прямой l, не проходящей через точку O, будем называть такую точку A, полярой которой является прямая l. (Другими словами, $OA \perp l$ и $OA = r^2/d$, где d – расстояние от точки O до прямой l.)

Например, полярой точки, лежащей на окружности ω, является проходящая через эту точку касательная.[1]

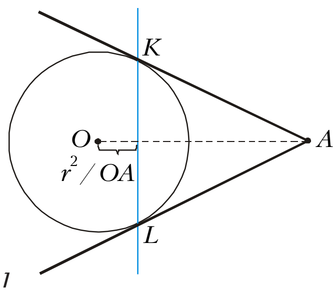

Рис. 1

[1] *Для доказательства достаточно заметить, что $r^2/r = r$ и касательная перпендикулярна радиусу.*

Столь же легко убедиться, что если $OA < r$, т.е. $r^2/OA > r$, то поляра точки, лежащей внутри окружности ω, не пересекает ω.

Если $OA > r$, то поляра точки A пересекает окружность ω в некоторых двух точках K и L (рис. 1). Оказывается, прямые AK и AL – касательные к окружности! Это легко доказать непосредственно, но мы выведем это утверждение из еще более важного свойства полярного преобразования:

если точка B лежит на поляре точки A, то и точка A лежит на поляре точки B.

Действительно, по определению, поляра точки A перпендикулярна лучу OA и проходит через такую точку A' этого луча, что $OA' = r^2/OA$ (рис.2).

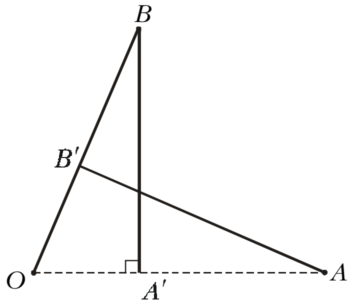

Рис. 2

Рассмотрим такую точку B' луча OB, для которой $OB' = r^2/OB$. Соединим B' и A отрезком.

Поскольку

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{r^2/OB}{r^2/OA} = \frac{OA}{OB}$$

и поскольку угол O треугольников $OB'A$ и $OA'B$ общий, то эти два треугольника подобны. Соответственные углы подобных треугольников равны:

$$\angle OA'B = \angle OB'A = 90^\circ,$$

что и требовалось.

Как вы помните, мы обещали доказать, что прямые AK и AL (см. рис. 1) касаются окружности ω. Это теперь легко сделать: поскольку точка K лежит на поляре точки A, то точка A лежит на поляре точки K, а эта поляра как раз и является касательной к окружности.[2]

Теорема Паппа

Рассмотрим вписанный в окружность шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ (рис.3). Пусть продолжения его противоположных сторон AB_1 и A_1B пересекаются в точке M, продолжения сторон AC_1 и A_1C – в точке L, а продолжения BC_1 и B_1C – в точке K. Известная

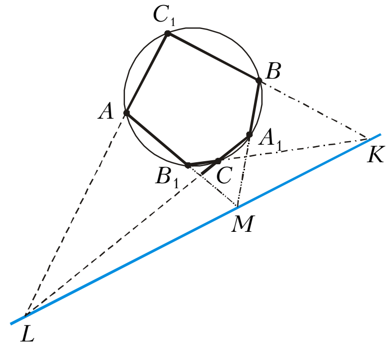

Рис. 3

теорема Паскаля гласит: точки K, L, M лежат на одной прямой.

Утверждение теоремы Паскаля верно и для самопересекающихся шестиугольников (рис.4), а также для шестиугольников, вписанных в эллипс и гиперболу. Оно верно даже для шести-

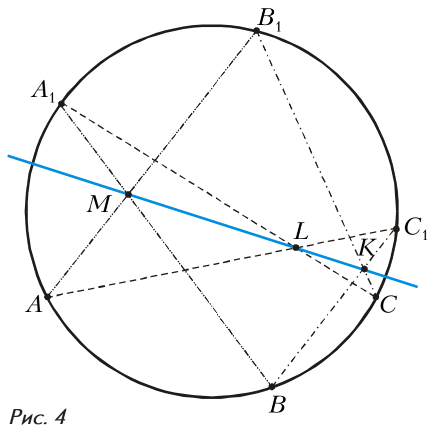

Рис. 4

угольников, «вписанных в две прямые». Мы не будем доказывать теорему Паскаля и сформулировали ее здесь лишь для того, чтобы менее неожиданной стала формулировка теоремы Паппа, которая наряду с теоремой Паскаля является одной из важнейших теорем проективной геометрии.

Теорема Паппа. *Пусть точки A, B, C лежат на одной стороне угла, а*

[2] *Для точки L рассуждение аналогично.*