Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1726» или «Ф1733». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1726–М1728 предлагались на осеннем Турнире городов.

Задачи Ф1733–Ф1735, Ф1739, Ф1740 и Ф1742 предлагались на очном туре VI Соросовской олимпиады по физике.

Задачи М1726—М1735, Ф1733–Ф1742

М1726. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения n.

Р.Женодаров

М1727. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.

А.Шаповалов

М1728. Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,

а) делит периметр треугольника ABC пополам;

б) параллельна биссектрисе угла ACB.

Л.Емельянов

М1729. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.

В.Произволов

М1730*. Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

М.Волчкевич

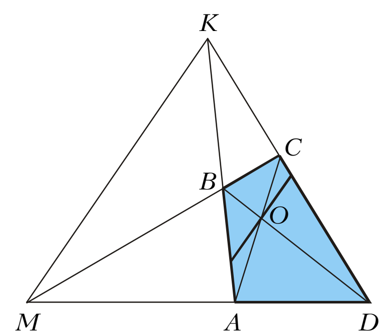

Рис.1

М1731. Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1732. а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B, имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.

б*) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?

В.Произволов

М1733. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство

$$\int_0^1 \left|x - f(x)\right| dx = \frac{1}{2} .$$

К.Каибханов