Программа

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<stdlib.h>

unsigned long mult(unsigned long a, unsigned long b, unsigned long n)
{unsigned long c=0;
 for(;b;b>>=1){if(b&1)c=(a+c)%n;a=a*2%n;}
 return c;}

int power(unsigned long b, unsigned long p, unsigned long m)
{unsigned long a=1;
 while(p){if(p&1)a=mult(b,a,m); b=mult(b,b,m); p>>=1;}
 return !((a+1)%m);}

main(int argc, char *argv[])
{if(argc<3){cprintf("\n\rВведите командную строку:\n\r");
cprintf("%s <файл> <основание> [начальный показатель (по умолчанию 1)]\n",argv[0]);
   return 1;}
 unsigned long b=atol(argv[2]), k;
 if(argc>3)k=atol(argv[3]); else k=1;
 if(!(b&&k))
 {cprintf("\n\n\n\rОснование степени и начальное число должны быть отличны от 0");
 return 1;}
 FILE *f=fopen(argv[1],"wt");
 cprintf("\n\n\n\r%10lu",k);
 fprintf(f,"%s^n+1 делится на n при следующих значениях:",argv[2]);
      for(unsigned long i=k;!kbhit()&&i<2147483648;i++)
      {cprintf("\b\b\b\b\b\b\b\b\b\b%10lu",i);
      if(power(b,i,i)){fprintf(f,"\n%10lu  ",i); cprintf("\n\r");}}
 fclose(f);
 while(kbhit())getch();
 return 0;}
```

Результаты работы этой программы таковы: 2^n+1 делится на n при $n = 1, 3, 9, 27, 81, 171$ [9], 243, 513, 729, 1539, 2187, 3249, 4617, 6561, 9747, 13203 [10], 13851, 19683, 29241, 39609, 41553, 59049, 61731, 87723, 97641, 118827, 124659, …

Все эти числа (кроме единицы, но она не в счет) делятся на 3. И среди них присутствуют все степени тройки. Как это объяснить?

Со степенями тройки мы разобрались мгновенно: по индукции легко доказать, что $2^{3^k}+1$ делится на 3^{k+1}.

И мы сразу сообразили, что верно следующее утверждение: *если n кратно 3 и $2^n + 1$ кратно n, то $2^{3n} + 1$ кратно 3n.* В самом деле,

$$2^{3n}+1=\left(2^n+1\right)\left(\left(2^n\right)^2-2^n+1\right);$$

первый множитель кратен n, а второй кратен 3. (Почему? Потому что из условия $2^n \equiv -1 \pmod n$ имеем $2^n \equiv -1 \pmod 3$, откуда $\left(2^n\right)^2-2^n+1 \equiv (-1)^2-(-1)+1 \equiv 0 \pmod 3$.)

Но это все не отвечало на самый наивный и самый интересный вопрос: почему числа n, для которых 2^n+1 кратно n и $n > 1$, поголовно делятся на 3?

Подумав несколько недель, мы поняли: надо рассмотреть *наименьший простой делитель p числа n*. Тогда

$$2^n \equiv -1 \pmod p.$$

Значит, $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$, и поэтому порядок числа 2 по модулю p является делителем числа $2n$. Поскольку он не превосходит $p - 1$ и поскольку число n не имеет простых делителей, меньших p, есть единственная возможность: порядок числа 2 по модулю p равен 2. Это значит, что $2^2 \equiv 1 \pmod p$, т. е. $p = 3$, что и требовалось доказать.

Упражнения

38. Пусть a, n – натуральные числа, $n > 1$. Докажите, что если a^n+1 делится на n, то наименьший простой делитель числа n является делителем числа $a + 1$.

39. Пусть n – натуральное число, $n > 3$ и 2^n+1 кратно n. Докажите, что

а) n кратно 9;

б) если $n > 9$, то n кратно 27 или 19;

в) если n делится на простое число $p \neq 3$, то $p \geq 19$;

г*) если n делится на простое число p, причем $p \neq 3$ и $p \neq 19$, то $p \geq 163$.

40. Если 2^a+1 кратно b и 2^b+1 кратно a, где $a > 1$ и $b > 1$, то a и b кратны 3. Докажите это.

41 (М1260*). Найдите все такие натуральные n, для которых 2^n+1 кратно n^2.

42. а) Если 2^n-1 кратно n, то $n = 1$. Докажите это.

б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых НОД$\left(2^n-1, n\right) > 1$.

в) Пусть a – натуральное число, $a > 2$. Докажите, что множество натуральных чисел n, для которых a^n-1 кратно n, бесконечно.

43. Пусть a – натуральное число, $a > 1$.

а) Существует бесконечно много n таких, что a^n+1 делится на n. Докажите это.

б) При каких a существует число $n > 1$ такое, что a^n+1 делится на n^2?

(Окончание следует)

[9] *Заметьте: предыдущие числа – степени тройки, а 171 = = 19 · 9.*

[10] *Впервые возник отличный от 3 и 19 простой множитель: 13203 = 163 · 81.*