Напомним, что в любом обычном (евклидовом) пространстве, например на плоскости, отношение периметра круга радиусом R к его площади есть

$$\frac{P}{S} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R},$$

и при $R \to \infty$ $\frac{P}{S} \to 0$.

В дискретном случае, если плоскость замощена ячейками – равносторонними треугольниками со стороной, равной 1 (рис.4,*а*), нетрудно подсчитать отношение числа P_K вершин треугольников, лежащих на границе равностороннего шестиугольника с центром в точке O и вписанного в окружность радиусом K, к числу S_K всех вершин треугольников, принадлежащих данному равностороннему шестиугольнику. В зависимости от K ($K = 0, 1, 2,\ldots$) величина P_K растет так: 1, 6, $6\cdot 2$, $6\cdot 3$, $6\cdot 4$, ..., $6\cdot K$, в то время как S_K можно вычислить по формуле $S_K = 1 + \sum_{j=1}^{K} P_j$, что дает $S = 1 + 3(K+1)K$. Следовательно, при $K \to \infty$

$$\frac{P_K}{S_K} \to 0.$$

Обратимся теперь к бумаге, ножницам и клею. Вырежем из бумаги равносторонний шестиугольник, разрежем его по радиусу, как показано на рисунке 4,*б*, и вклеим между разрезами «выточку» в виде равностороннего треугольника. В результате получим «равносторонний семиугольник», который, однако, не является плоским. Имея в наличии достаточное количество равносторонних треугольников, будем приклеивать их по периметру семиугольника таким образом, чтобы в каждой новой вершине сходились ровно семь треугольников. Как и в предыдущем случае, подсчитаем отношение числа $\tilde{P}_K$ вершин треугольников, лежащих на границе семиугольника с центром в точке O, к числу $\tilde{S}_K$ всех вершин треугольников, принадлежащих данному семиугольнику, нарисованному на неплоской(!) поверхности. Получим, что, в зависимости от удаления от центра, $\tilde{P}_K$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению (докажите это самостоятельно):

$$\tilde{P}_K = 3\tilde{P}_{K-1} - \tilde{P}_{K-2},$$

$$\tilde{P}_1 = 7,\ \tilde{P}_2 = 21$$

и растет так:

$$\tilde{P}_K = \frac{7}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^K - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^K\right).$$

Вычисляя $\tilde{S}_K$ по формуле, приведенной выше, убедимся в том, что отношение $\tilde{P}_K / \tilde{S}_K$ стремится к отличной от нуля константе: при $K \to \infty$

$$\frac{\tilde{P}_K}{\tilde{S}_K} \to \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \approx 0{,}618.$$

Это означает, что на полученной поверхности уже почти хватает места для того, чтобы нарисовать дерево Кейли без наложений и самопересечений так, что всем веточкам хватит места. Если бы мы вклеивали в шестиугольник не один, а два треугольника и вычисляли бы отношение $\tilde{P}_K / \tilde{S}_K$ для «восьмиугольников», то места для всех веточек дерева Кейли хватило бы с избытком!

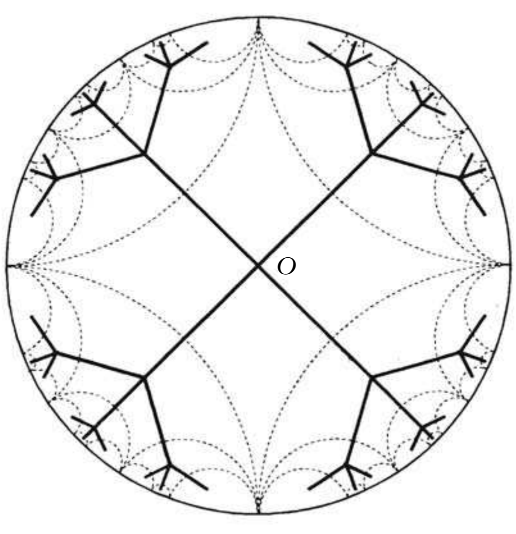

Рис.5. Плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре

Поверхность, склеенная таким образом, вблизи каждой вершины по структуре напоминает седло и является геометрическим образом поверхности постоянной отрицательной кривизны, называемой также *плоскостью Лобачевского*. Она обладает многими удивительными свойствами – например, сумма углов равностороннего треугольника, нарисованного на такой поверхности, меньше 180°, а отношение длины окружности, нарисованной на такой поверхности, к площади соответствующего круга всегда стремится к отличной от нуля константе.

Если же мы все-таки захотим нарисовать дерево Кейли на плоскости, то единственный способ сделать это заключается не в использовании тяжелого утюга для приглаживания упрямо топорщащихся веточек, а в том, чтобы последовательно от поколения к поколению в геометрической прогрессии уменьшать длину ветвей, как показано на рисунке 5. (Наверное, многие из читателей обратили внимание на то, что при этом получилась картинка, схематически напоминающая известную гравюру Мориса Эшера «Предел на круге IV». И это совершенно не случайно. Рисунок голландского художника, построенный по принципу инверсии точек относительно окружности, является прекрасным геометрическим образом неевклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) в модели, предложенной Анри Пуанкаре.)

(Множество интересных геометрически наглядных иллюстраций весьма непростых тополого-алгебраических понятий можно найти в книге [3]. Тем, кого более глубоко заинтересовали физические проблемы топологии, можно посоветовать прочитать статью [4].)

Вот и все. Хотя не совсем. Однажды сороконожка задумалась над тем, как ей удается так ловко переставлять все 40 ног, что они не переплетаются. Подумав об этом, она немедленно сбилась и упала, так как 27 из 40 ее ног безнадежно запутались... Я бы не хотел, чтобы читатели этой статьи, почувствовав математическую сложность и глубину топологических проблем, разучились завязывать шнурки на ботинках. Не бойтесь ничего и дерзайте!

Рекомендуемая литература

[1] А.Б.Сосинский. *Узлы, зацепления и их полиномы*. – Квант, 1989, №4.

[2] А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. *Физика в мире полимеров*. – М.: Наука, 1989. (Серия: Библиотечка «Квант», вып.74.)

[3] К.Б.Левитин. *Геометрическая рапсодия*. – М.: Знание, 1984.

[4] С.К.Нечаев. *Проблемы вероятностной топологии: статистика узлов и некоммутативных случайных блужданий*. – УФН, 168 (1998).