Заключительный этап конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»

С 27 июня по 4 июля 1999 года на берегу Рыбинского водохранилища в профилактории «Приморский хуторок» проходил заключительный этап турнира «Математика 6-8». В нем участвовали команды из Астрахани, Иванова, Костромы, Краснодара, Минска, Москвы, Набережных Челнов, Петровска-Забайкальского (есть такой город в Читинской области), Рыбинска, Самары, Харькова, Чебоксар и Ярославля.

В Рыбинске турнир проходил третий год подряд. На этот раз к прежним достоинствам – санаторному быту, десятикилометровой удаленности от ближайшего поселка, необъятному сосновому бору, где легко найти ужа (а ежи безбоязненно бегают вечерами по дорожкам между жилыми корпусами), – благодаря жаркому лету, добавилось еще купание (по несколько раз в день). Руководителям команд не приходилось волноваться за безопасность школьников: средняя глубина Рыбинского водохранилища всего лишь полтора метра, дно – ровное, чистое, песчаное.

«Мы едем решать интересные задачи и отдыхать», – сказал своим ученикам на вокзале руководитель команды Москвы А.Н.Карпов – и оказался абсолютно прав: дети хорошо отдохнули и многому научились. Не менее благодарны организаторам турнира руководители команд и жюри. Для этих людей, влюбленных в математику и чувствующих личную ответственность за судьбы своих учеников и образования в целом, турнир – своеобразный отчет о работе за год.

По традиции, турнир включал в себя как личную олимпиаду, в которой каждый участник решал задачи индивидуально, так и командные соревнования — математические бои.

Вот список лауреатов личной олимпиады:

Дипломы I степени получили

Голубов Алексей – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гонгальский Максим – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Дудко Артем – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Коршунов Кирилл – Москва, Пятьдесят седьмая школа, 8 кл.,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Позовной Олег – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Поярков Александр – Рыбинск, лицей 2, 8 кл.,
Преображенский Игорь – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Рябинин Сергей – Иваново, школа 30, 8 кл.,
Тимаков Антон – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей «Гармония», 7 кл.,
Шаповалова Валентина – Иваново, лицей «Гармония», 7 кл.,
Шмаевский Семен – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.

Дипломы II степени получили

Алексеев Иван – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Бурмако Евгений – Минск, школа 184, 7 кл.,
Гордон Дмитрий – Харьков, гимназия 45, 7 кл.,
Дудченко Николай – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Колбун Владимир – Минск, политехническая гимназия, 8 кл.,
Кругов Виталий – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.,
Кулибаба Виктор – Астрахань, ФМШ 32, 8 кл.,
Логинова Тамара – Кострома, лицей 17, 8 кл.,
Мазаник Юрий – Минск, школа 51, 8 кл.,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Морозов Иван – Иваново, лицей 6, 8 кл.,
Овчинников Федор – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Половинкина Елена – Краснодар, лицей 90, 8 кл.,
Стожков Владимир – Рыбинск, лицей 2, 8 кл.,
Тучков Павел – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.

Дипломы III степени получили

Баканов Сергей – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Балмасов Евгений – Ярославль, школа 10, 7 кл.,
Буланов Павел – Минск, школа 19, 7 кл.,
Горбачева Екатерина – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Ефимов Андрей – Кострома, школа 1, 7 кл.,
Зимин Иван – Рыбинск, школа 30, 7 кл.,
Матвеев Дмитрий – Астрахань, ФМШ 32, 7 кл.,
Носович Сергей – Жодино, школа 7, 7 кл.,
Осянин Станислав – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,
Панов Михаил – Рыбинск, лицей 2, ,7 кл.,
Сабирова Вера – Москва, лицей «Вторая школа», 8 кл.,
Сидоров Алексей – Кострома, школа 32, 7 кл.,
Солонников Дмитрий – Краснодар, лицей 90, 8 кл.,
Сотнезов Роман – Чебоксары, школа 27, 7 кл.,
Сычев Антон – Иваново, лицей 33, 8 кл.,
Федоров Олег – Москва, Пятьдесят седьмая школа, 8 кл.,
Щукин Дмитрий – Чебоксары, школа 27, 7 кл.

В командных соревнованиях победителем турнира стала команда Набережных Челнов (руководитель – Л.В.Баева), а капитан этой команды Каленков Максим отмечен специальным призом «Лучшему игроку».

Дипломами второй степени награждены команды Москвы (А.Н.Карпов) и Харькова (Е.Л.Аринкина и А.Л.Берштейн). Дипломы третьей степени получили команды Рыбинска (Т.И.Михайлова) и Ярославля (С.Г.Волченков). Команды Чебоксар (А.В.Монов) и Астрахани (А.В.Забалуева и С.С.Тасмуратов) награждены дипломами «За успешное участие».

Познакомимся с некоторыми задачами турнира.

Личная олимпиада

Задачи

1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $BM = BC$ и $AN = AC$ (рис.1). Затем на катетах BC и AC отметили, соответственно, точки P и Q так, что $BP = BN$ и $AQ = AM$.

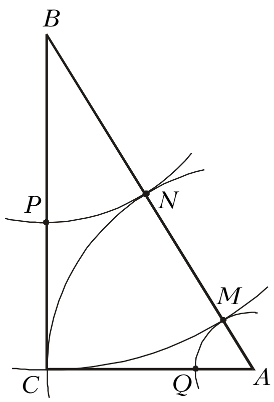

Рис. 1

Докажите, что точки C, Q, M, N, P лежат на одной окружности.

(В.Произволов)

2. Можно ли куб размером $2\times2\times2$ оклеить в один слой четырьмя одинаковыми развертками куба $1\times1\times1$?

(С.Токарев)

3. Три мухи в полдень сели на секундную, минутную и часовую стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с секундной и часовой). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

(С.Волченков)

Решения

1. $CMNP$ – равнобокая трапеция; вокруг нее можно описать окружность. Аналогично, $CQMN$ – равнобокая трапеция, тоже вписанная в окружность. Эти две окружности имеют три общие точки: C, M и N. Три точки однозначно задают окружность – следовательно, рассматриваемые окружности совпадают. Все сделано!

Отметим, что несколько лет назад М. Евдокимов придумал такую задачу: *если вписать в прямоугольный треугольник ABC окружность и опустить на гипотенузу и катеты перпендикуляры (рис.2), то основания этих перпендикуляров Q, M, N, P и вершина C прямого угла лежат на одной окружности.*

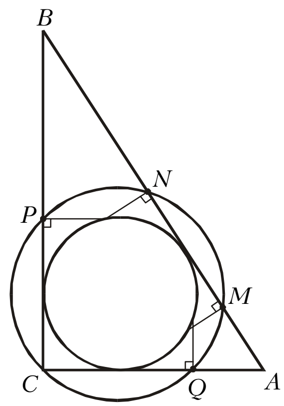

Рис. 2

(Хотите знать решение? Все точки, из которых данная окружность видна под углом 90°, лежат на окружности с тем же центром и в $\sqrt{2}$ раз большим радиусом.) Задача 1 – великолепная переформулировка задачи Евдокимова.

2. Эта задача сложна для проверки: почти у каждого решившего задачу – своя развертка куба $2\times2\times2$ и свой способ разрезания на четыре развертки куба $1\times1\times1$. На рисунках 3 и 4 показаны два способа, предложенные школьниками. Попытайтесь их проверить – скорее всего, как и у нас, воображение откажет. Тогда придется резать бумагу и складывать кубик! (Кстати, можете сказать, это по сути разные способы или одинаковые?)

А теперь – оцените авторское решение (рис.5)!

3. Эту задачу никто не решил, хотя один участник олимпиады неведомым жюри способом получил правильный

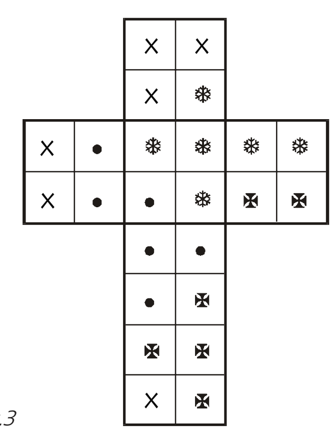

Рис.3

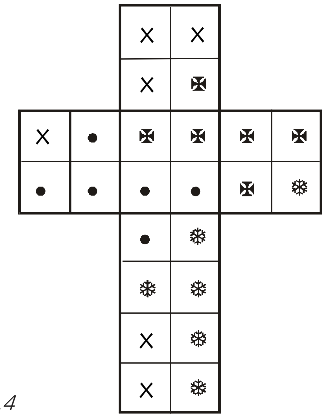

Рис.4

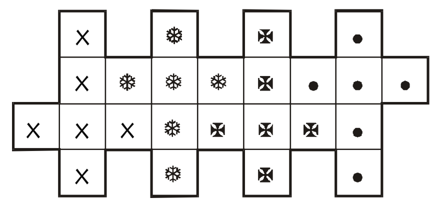

Рис.5

ответ, не сумев его обосновать. (Забегая вперед, отметим, что каждая из остальных задач турнира была решена хотя бы одним школьником.)

Идея решения истинно олимпиадная: мухи не перегоняют одна другую. Значит, никакая муха не может обогнать никакую другую более чем на один оборот. Поэтому количества оборотов, сделанных мухами, не могут отличаться более чем на единицу.

Часовая стрелка делает за 12 часов один оборот, минутная – 12, секундная – 720; три мухи вместе сделают $1 + 12 + 720 = 733$ оборота. Осталось представить число 733 в виде суммы трех натуральных чисел, отличающихся не более чем на единицу: $733 = 244 + 244 + 245$. Это и есть ответ: мухи, начавшие свой путь на часовой и минутной стрелках, сделали по 244 оборота, а третья муха – 245.

Командные соревнования (математические бои)

Задачи

4. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

(А.Шаповалов, В.Шорин)

5. По кругу написаны n натуральных чисел, при этом каждые два соседних числа отличаются на 1.

Назовем число значительным, если оба соседа меньше его; сумма всех значительных чисел равна M. Назовем число незначительным, если оба его соседа больше его; сумма всех незначительных чисел равна m. Докажите равенство $n = 2(M - m)$.

(В.Произволов)

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли, соответственно, точки K и L, а на стороне AC — точки M и N так, что KL параллельно AC, $AK = KM$, $NL = LC$. Докажите, что $AC \perp BP$, где P — точка пересечения прямых KM и LN.

(С.Волченков)

Решения

4. Занумеруем окопы слева направо числами от 1 до 1000. Предположим сначала, что в момент первого выстрела пехотинец сидит в окопе с нечетным номером. Пусть пушка выстрелит в окоп номер 1. Если не попала, то пехотинец перешел в окоп с четным номером. Выстрелим во второй окоп. Если не попали, то пехотинец перешел в окоп с нечетным номером, не меньшим 3. Выстрелим в окоп номер 3, и так далее. Оттесняя пехотинца, мы таким образом поразим его.

Если же вначале пехотинец находился в окопе с четным номером, то после тысячного выстрела он находится в окопе с четным номером. Теперь опять стреляем в 1000-й окоп, а потом в 999-й, 998-й,…, 1-й.

5. Выпишем n пар соседних чисел и в каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Сложим эти разности. С одной стороны, эта сумма равна n, так как каждая разность равна 1. С другой стороны, каждое значительное число войдет в две разности со знаками плюс, каждое незначительное — со знаками минус, а все остальные — по одному разу с каждым знаком. Значит, $n = 2M - 2m$.

6. *Указание.* Треугольники LKB и LKP (рис.6) симметричны относительно прямой LK.

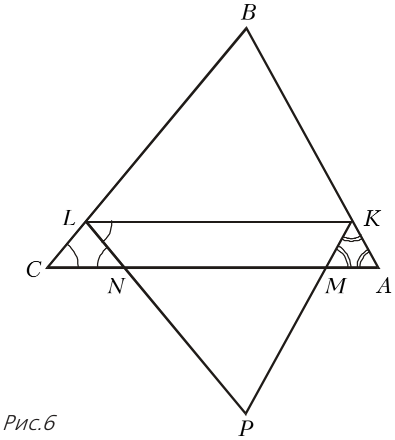

Рис.6

Еще несколько задач

7. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

(И.Акулич)

8. В конференции участвовали 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?». Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

(А.Шаповалов)

9. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учеников участвовали в этих олимпиадах?

(А.Шаповалов)

10. Можно ли на поверхность куба наклеить без наложения прямоугольник так, чтобы он закрыл половину каждой грани?

(Д.Калинин)

11. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ферзи по следующим правилам: каждым ходом на доску устанавливается один ферзь, и, если он кого-либо побил, то один из побитых им ферзей снимается с доски. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске с соблюдением этих условий?

(И.Акулич)

12. На каждой стороне треугольника отметили по точке и соединили эти точки отрезками, тем самым разбив треугольник на четыре меньших треугольника. Все четыре оказались подобны друг другу. Обязательно ли эти четыре треугольника равны между собой?

(А.Шаповалов)

13. Строки и столбцы таблицы размером 9×9 занумеровали числами от 2 до 10 и в каждую клетку вписали произведение номера ее строки на номер ее столбца. Затем несколько строк и столбцов вычеркнули. Может ли сумма оставшихся чисел оказаться простым числом?

(И.Акулич)

14. Из 1998 дробей $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1998}$ составили всевозможные произведения по три. Затем эти произведения просуммировали, привели к общему знаменателю и полученную дробь преобразовали к несократимому виду. Докажите, что числитель полученной дроби кратен 1999. (*Указание.* Число 1999 — простое.)

(И.Акулич)

15. Числами от 1 до 100 сверху вниз пронумеровали 100 карточек в стопке. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или по нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение номеров всех карточек станет кратно 1000000. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш?

(А.Шаповалов)

16. Ветка кустарника (рис. 7) имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвет последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких — его противник, если оба играют наилучшим образом?

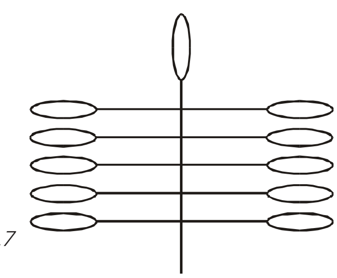

Рис.7

(И.Акулич)

Заключение

Отметим, что успешным своим проведением конкурс обязан Управлению по делам образования и молодежи г. Рыбинска. Особой благодарности заслуживают заместитель главы администрации Рыбинского муниципального округа А.И.Брянкин и руководитель Рыбинского филиала Ярославской областной заочной математической школы А.Н.Морозов. Книги для призов победителям были предоставлены Московским институтом развития образовательных систем и журналом «Квант».

А.Спивак, С.Токарев