Закон сохранения импульса

В.ЧИВИЛЁВ

Импульсом материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных точек: $\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots$ Любое макроскопическое тело или несколько макроскопических тел можно рассматривать как систему материальных точек, поскольку каждое тело можно мысленно разбить на сколь угодно малые части и считать их материальными точками. В дальнейшем систему материальных точек для краткости будем называть просто системой.

Из законов Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета справедливо векторное равенство

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}, \qquad (1)$$

где $\vec{F}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему в течение сколь угодно малого интервала времени Δt $(\Delta t \to 0)$, а $\Delta\vec{p}$ – изменение импульса системы за это время. Произведение $\vec{F}\Delta t$ называется импульсом силы. Обратите внимание, что $\vec{F}$ – это сумма только *внешних* сил, т.е. сил, действующих на тела системы со стороны тел, не входящих в систему. Внутренние силы, т.е. силы взаимодействия между частями системы, в равенство (1) не входят.

Если в течение времени Δt $(\Delta t \to 0)$ сумма внешних сил равна нулю, т.е. $\vec{F} = 0$, то $\Delta\vec{p} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$, т.е. импульс системы в течение Δt сохраняется. Когда время взаимодействия тел системы (время опыта) не мало, его можно разбить на сколь угодно малые интервалы: $\Delta t = \Sigma\Delta t_k$, где $k = 1, 2, 3\ldots$ Если в течение каждого такого интервала сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы будет сохраняться в течение этого интервала и, как следствие, в течение всего времени опыта. Напомним, что замкнутой (изолированной) системой называется система, тела которой не взаимодействуют с другими телами (внешним миром). Ясно, что для замкнутой системы $\vec{F} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$.

Итак, в инерциальной системе отсчета импульс системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого) в двух случаях:

1) система в течение Δt замкнута (изолирована);

2) система не замкнута, т.е. внешние силы есть, но их сумма равна нулю в течение всего времени Δt.

Это утверждение и представляет собой закон сохранения импульса в развернутой формулировке.

Импульс системы – это вектор, и его сохранение в течение некоторого времени взаимодействия частей системы встречается не так часто, хотя бы потому, что в земных условиях строго замкнутой системы нет в принципе из-за наличия внешней силы – силы притяжения к Земле. Да и равенство нулю суммы всех внешних сил на протяжении некоторого интервала времени может реализоваться только при вполне определенных условиях. Гораздо чаще встречается случай, когда за время Δt векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма их проекций на некоторую ось X в пространстве. Тогда в течение этого времени сохраняется проекция на ось X импульса системы. Действительно, запишем равенство (1) в проекциях на ось X:

$$F_x\Delta t = \Delta p_x, \qquad (2)$$

где F_x – проекция на ось X суммы всех внешних сил (по правилам действия с векторами F_x равна сумме проекций на ось X всех внешних сил), а Δp_x – проекция на ось X изменения импульса системы $\Delta\vec{p}$ (по правилам действия с векторами Δp_x равна изменению проекции на ось X импульса системы). Если в течение времени $\Delta t \to 0$ $F_x = 0$, то из равенства (2) следует, что $\Delta p_x = 0$ и $p_x = \text{const}$. Если же время Δt опыта не мало, то после разбиения его на сколь угодно малые интервалы легко показать, что при выполнении в течение произвольного Δt условия $F_x = 0$ будет иметь место следствие $p_x = \text{const}$.

Иными словами, в инерциальной системе отсчета проекция на некоторую ось X импульса системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени Δt (не обязательно малого), если сумма проекций на ось X всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю в течение этого времени Δt.

На основании этого утверждения о сохранении проекции импульса и решается большинство задач. При этом часто запись уравнения, отражающего сохранение проекции импульса в виде равенства начальной и конечной проекций импульса, обосновывается фразой «по закону сохранения импульса», что не совсем точно. Но поскольку эта неточность не влияет на результат при решении задачи, на нее, как правило, никто не обращает внимания, в том числе и экзаменаторы.

Скажем несколько слов о приближенном сохранении импульса или его проекции. Равенство (1) тем точнее, чем меньше Δt. Конечное время опыта Δt можно разбить на сколь угодно малые интервалы времени Δt_k и записать для каждого из них равенство $\vec{F}_k\Delta t_k = \Delta\vec{p}_k$. Сложив все такие равенства, получим новое, внешне похожее на (1):

$$\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t = \Delta\vec{p}, \qquad (3)$$

где $\vec{F}_{\text{ср}}$ – некоторая средняя внешняя сила, действующая в течение Δt и определяемая из равенства $\vec{F}_{\text{ср}}\Delta t = \Sigma\vec{F}_k\Delta t_k$, а $\Delta\vec{p} = \boldsymbol{\Sigma}\Delta\vec{p}_k$ – изменение импульса системы за конечное время Δt. Аналогично получается и внешне похожее на (2) равенство в проекциях:

$$F_{x\,\text{ср}}\Delta t = \Delta p_x, \qquad (4)$$

где $F_{x\,\text{ср}}$ – некоторое среднее значение суммы проекций на ось X всех внешних сил в течение конечного времени опыта Δt, а Δp_x – изменение проекции на ось X импульса системы за это время. Ясно, что при $\vec{F}_{\text{ср}} = 0$ (например, $\vec{F} = 0$ в любой момент опыта) из равенства (3) следует $\Delta\vec{p} = 0$ и $\vec{p} = \text{const}$. При $F_{x\,\text{ср}} = 0$ из равенства (4) следует $p_x = \text{const}$. Если же в течение времени опыта не выполняется строго $\vec{F}_{\text{ср}} = 0$ или $F_{x\,\text{ср}} = 0$, то за «помощью» в решении задачи следует обращаться к равенствам (3) и (4) и анализировать их. Иногда можно считать, что величины $F_{\text{ср}}\Delta t$ или $F_{x\,\text{ср}}\Delta t$, характеризующие импульс силы, малы. Тогда из (3) или (4) следует, что $\vec{p} \approx \text{const}$ или $p_x \approx \text{const}$. Такая ситуация встречается при некоторых взаимодействиях тел системы – таких, как удары, когда Δt мало, а $F_{\text{ср}}$ или $F_{x\,\text{ср}}$ ограничены из-за ограниченности значений F или F_x в течение опыта.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Автор всех разобранных задач, включая и задачи для упражнений, – автор этой статьи.

Задача 1. *После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой $m_1 = 4$ кг полетел вертикально вниз со скоростью $v_1 = 150$ м/с, осколок массой $m_2 = 3$ кг полетел горизонтально на юг со скоростью $v_2 = 100$ м/с, осколок массой $m_3 = 1$ кг – горизонтально на восток. Осколок массой $m_4 = 3{,}5$ кг полетел со скоростью $v_4 = 200$ м/с. Найдите скорость осколка массой m_3.*

Рассмотрим систему из четырех осколков. За малое время разрыва Δt действием внешних сил – сил тяжести – можно пренебречь, поскольку за то время они не вызывают существенного изменения импульса осколков из-за их малости по сравнению с внутренними силами, действующими между осколками. Поэтому можно считать, что импульс системы сохраняется (приближенно):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = 0 .$$

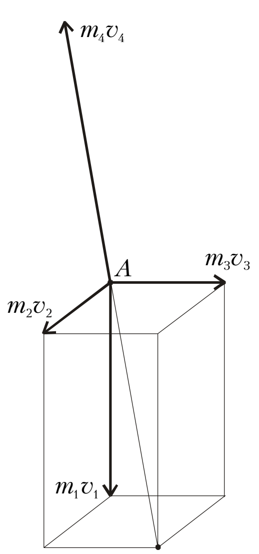

Рис. 1

Длина вектора $m_4\vec{v}_4$ равна длине диагонали AB прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $m_1\vec{v}_1$, $m_2\vec{v}_2$ и $m_3\vec{v}_3$ (рис.1). Следовательно,

$$(m_4v_4)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + (m_3v_3)^2 .$$

Из последнего равенства находим

$$v_3 = \frac{\sqrt{(m_4v_4)^2 - (m_1v_1)^2 - (m_2v_2)^2}}{m_3} = 200 \text{ м/с} .$$

Задача 2. *Между шариками с массами m и M, связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью k, сжатая на некоторую величину (рис.2). Система движется со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через центры шариков. Нить пережигают, и один из шариков останавливается. Найдите начальную величину сжатия пружины.*

Система из шариков, пружины и нити предполагается замкнутой. В земных условиях смоделировать процесс, описанный в задаче, можно на гладком горизонтальном столе. Ясно, что остановиться может только левый шарик, так как пружина на него действует силой, направленной против его начальной скорости. Пусть скорость правого шарика после распрямления пружины равна $\vec{v}$. По закону сохранения импульса,

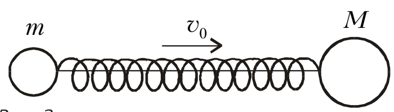

Рис. 2

$$(m + M)\vec{v}_0 = M\vec{v} .$$

Заметим, что совпадение направлений скоростей $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$ следует именно из последнего равенства. Взяв модули от левой и правой частей этого равенства (точнее, записав равенство в проекциях на ось X, направленную вдоль оси пружины), получим

$$(m + M)v_0 = Mv .$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{(m+M)v_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} .$$

Исключая из последних двух уравнений v, находим искомую величину сжатия пружины

$$x = v_0\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right)} .$$

Задача 3. *Кусок пластилина массой $m = 32$ г попадает в брусок массой $6m$, двигавшийся по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.3), прилипает к бруску и далее движется с ним по столу. Перед ударом скорость куска пластилина равна $v = 7$ м/с и направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, а скорость бруска равна $v/4$ и лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластилина. Определите скорость бруска с пластилином после удара. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластилина и окружающих тел?*

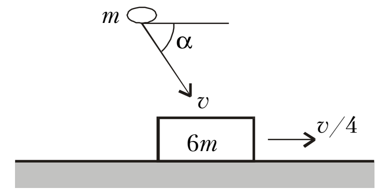

Рис. 3

Внешние силы, действующие на систему из бруска и пластилина за время их взаимодействия Δt, – это силы тяжести $m\vec{g}$ и $6m\vec{g}$ и зависящая от времени сила $\vec{N}(t)$ нормальной реакции стола на брусок, направленная вертикально вверх. Ясно, что сумма внешних сил

$$\vec{F} = m\vec{g} + 6m\vec{g} + \vec{N}(t)$$

в произвольный момент интервала времени Δt не равна нулю. Этим и объясняется, что импульс системы не сохраняется. Впрочем, несохранение импульса сразу бросается в глаза – начальный суммарный импульс системы направлен вправо и вниз, а конечный – вправо и горизонтально.

Если импульс системы не сохраняется, то следует поискать ось в пространстве, для которой сохраняется проекция импульса системы. Поэтому проанализируем выражение для $\vec{F}$. Ясно, что для горизонтальной оси X, направленной вдоль начальной скорости бруска, $F_x = 0$ в любой момент из интервала Δt, поэтому проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$mv\cos\alpha + 6m\frac{v}{4} = (m + 6m)u ,$$

откуда и находим скорость бруска с пластилином:

$$u = \frac{(\cos\alpha + 3/2)v}{7} = \frac{2v}{7} = 2 \text{ м/с} .$$

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

Величину ΔW увеличения внутренней энергии бруска, пластилина и окружающих тел найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{6m(v/4)^2}{2} = \frac{(m+6m)u^2}{2} + \Delta W,$$

откуда, с учетом выражения для u, получаем

$$\Delta W = \frac{45}{112} mv^2 = 0{,}63 \text{ Дж}.$$

Задача 4. *Пуля летит горизонтально со скоростью v_0, пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола небольшую коробку и вылетает в том же направлении с втрое меньшей скоростью. Масса коробки в 5 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом μ. Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. На какое расстояние передвинется при этом коробка?*

Рассмотрим систему из коробки и пули. Пусть масса пули m, масса коробки $5m$, скорость коробки сразу после вылета пули v. За время взаимодействия Δt (пролета пули через коробку) на систему действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $m\vec{g}$ и $5m\vec{g}$, направленная вертикально верх и мало изменяющаяся со временем сила нормальной реакции стола $\vec{N}$ и направленная против скорости коробки сила трения со стороны стола $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис.4).

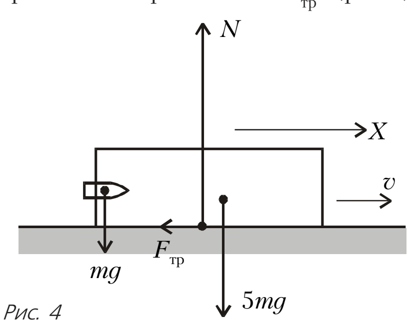

Рис. 4

Ясно, что сумма внешних сил $\vec{F} = m\vec{g} + 5m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ в течение Δt не равна нулю. Не равна нулю и проекция F_x на горизонтальную ось X, направленную вдоль скорости коробки: $F_x = -F_{\text{тр}}$. Но действием ограниченной по величине силы трения за малое время пролета Δt можно пренебречь и считать, что $F_x \Delta t = 0$. Тогда за время пролета пули проекция на ось X импульса системы сохраняется (приближенно):

$$mv_0 = \frac{mv_0}{3} + 5mv,$$

откуда и находим скорость коробки:

$$v = \frac{2}{15} v_0.$$

После вылета пули скорость коробки с течением времени уменьшается под действием силы трения, равной $5\mu mg$. Расстояние s, на которое передвинется коробка, найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{5mv^2}{2} = 5\mu mgs,$$

и

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2v_0^2}{225\mu g}.$$

Задача 5. *Трубка в форме петли укреплена на бруске, находящемся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.5). Нижний конец трубки*

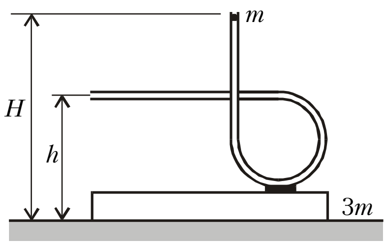

Рис. 5

горизонтален и находится на расстоянии h от стола. Шарик массой m, который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте H от стола. Масса платформы с трубкой 3m. Вначале система покоилась. Шарик отпустили. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) брусок закреплен на столе; 2) брусок не закреплен и после вылета шарика движется поступательно.

1) В случае закрепленного бруска скорость v_1 вылетевшего шарика найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$mgH = mgh + \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h)}.$$

2) В случае незакрепленного бруска будем рассуждать так. Пусть шарик вылетел из трубки со скоростью v_2, а брусок с трубкой приобрел скорость u в противоположном направлении. На систему из шарика и бруска с трубкой за время Δt движения шарика в трубке действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести $m\vec{g}$ и $3m\vec{g}$ и направленная вертикально вверх и зависящая от времени сила нормальной реакции стола $\vec{N}(t)$. Заметим, что Δt здесь не считается малым! Направим ось X горизонтально в направлении скорости вылетевшего шарика. Ясно, что проекция на ось X суммы всех трех вертикальных сил равна нулю в любой момент из интервала времени Δt. Значит, проекция на ось X импульса системы сохраняется:

$$0 = mv_2 - 3mu.$$

По закону сохранения и превращения энергии,

$$mgH = mgh + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{3mu^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений находим скорость шарика:

$$v_2 = \sqrt{\frac{3g(H-h)}{2}}.$$

Упражнения

1. Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки массами $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг и $m_3 = 4$ кг полетели, соответственно, со скоростями $v_1 = 200$ м/с вертикально вверх, $v_2 = 150$ м/с горизонтально на север и $v_3 = 100$ м/с горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвертый осколок?

2. Камень массой $m = 1$ кг подняли на некоторую высоту и отпустили без начальной скорости. Через время $t = 1$ с практически свободного падения камень попал в ящик с песком массой $5m$, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v = 6$ м/с. Найдите скорость ящика с камнем. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика, песка, камня и окружающих тел?

3. Трубка в виде петли жестко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.6). Правый конец трубки горизонтален, его расстояние до стола h. В трубке на высоте H удерживается шарик массой m, который может скользить по трубке без трения. Масса платформы с трубкой $4m$. Система покоится. Шарик отпускают. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) платформа закреплена на столе; 2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.

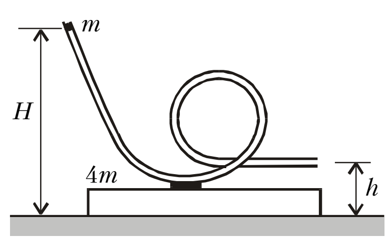

Рис. 6