7. На острове Новая Вавилония используются 45 языков, причем каждый житель знает по крайней мере пять из них. Любые два жителя могут вести между собой беседу, возможно, при посредничестве других островитян. Докажите, что любые два островитянина могут поговорить друг с другом, пользуясь услугами не более чем 15 переводчиков. (9)

С.Берлов

8. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, а также отмечены середины K и L сторон AB и BC соответственно. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую CC_1, а точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из вершины С на прямую AA_1. Докажите, что прямые KP и LQ пересекаются на стороне AC. (9)

Ф.Бахарев

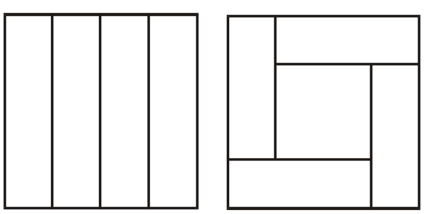
9. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd .$$

Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное. (9)

С.Иванов

10. Квадрат $ABCD$ разбит на прямоугольники с одинаковыми периметрами, стороны которых параллельны сторонам квадрата. Диагональ AC пересекает все прямоугольники. Докажите, что диагональ BD тоже пересекает все прямоугольники. (10)



Замечание. На рисунке показаны примеры разбиения квадрата на прямоугольники равного периметра.

С.Берлов

11. В последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно либо сумме, либо модулю разности двух предыдущих. На доске выписаны первые 1999 членов этой последовательности. Докажите, что можно продолжить ее с соблюдением указанного свойства так, чтобы в ней снова встретились подряд в том же порядке эти 1999 чисел. (11)

Д.Ростовский

12. Диагонали шестиугольного сечения куба пересекаются в одной точке. Докажите, что сечение проходит через центр куба. (11)

Р.Исмаилов

13. Вдоль прямого шоссе расставлены светофоры. На каждом минуту горит красный свет, минуту – зеленый (не обязательно синхронно). По шоссе со скоростью 60 км/ч едут в одном направлении две машины. На красный свет машина мгновенно останавливается, на зеленый – мгновенно возобновляет движение с прежней скоростью. Докажите, что если в начальный момент расстояние между машинами больше 2 км, то они никогда не встретятся. (11)

С.Иванов

14. На клетках бесконечной доски стоят несколько шашек. Разрешается переместить любую шашку на клетку, симметричную ей относительно какой-нибудь другой шашки; допускается наличие нескольких шашек на одной клетке. В позициях A и B все шашки стоят на разных клетках, расположенных не на одной прямой, и из A можно получить B указанными операциями. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в промежуточных позициях все шашки стояли на разных клетках. (11)

К.Кохась

15. Докажите, что при $k > 2$ число $a_k = 2^{2^k - 1} - 2^k - 1$ – составное. (11)

Н.Филонов

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

16. Для каких $n \geq 3$ можно расставить числа от 1 до n в вершинах правильного n-угольника так, чтобы выполнялось следующее свойство: для любых трех вершин A, B и C таких, что $AB = AC$, число в вершине A либо больше, либо меньше обоих чисел в вершинах B и C? (9)

С.Иванов

17. AL – биссектриса треугольника ABC. Через вершины B и C проведены параллельные прямые b и c соответственно, равноудаленные от вершины A. На прямых b и c выбраны такие точки M и N, что отрезки LM и LN пересекаются со сторонами AB и AC соответственно и делятся ими пополам. Докажите, что $LM = LN$. (9)

Ф.Бахарев, С.Берлов

18. Выпуклый n-угольник $(n > 3)$ разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что можно отметить $n - 1$ отрезков из числа сторон и проведенных диагоналей многоугольника так, чтобы никакой набор из отмеченных отрезков не образовывал замкнутой ломаной и ни из какой вершины не выходило ровно два отмеченных отрезка. (9)

Д.Карпов

19. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в нижнем горизонтальном ряду стоят числа от 1 до 10 в порядке возрастания, в следующем ряду – числа от 11 до 20 в порядке возрастания, и т.д. Разрешено выбрать любые три клетки, стоящие подряд в горизонтальном, вертикальном или диагональном ряду, и либо прибавить 1 к числам в крайних клетках и вычесть 2 из числа в средней клетке, либо, наоборот, вычесть 1 в крайних клетках и прибавить 2 в средней. После выполнения нескольких таких операций оказалось, что в таблице опять стоят все числа от 1 до 100. Докажите, что их расположение совпадает с исходным. (10)

О.Ванюшина

20. Рассмотрим возрастающую арифметическую прогрессию из натуральных чисел. Разделим каждый ее член на его наибольший простой делитель. Докажите, что образовавшаяся последовательность частных неограничена. (11)

А.Голованов

21. На 50 карточках с обеих сторон написаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 100. Карточки лежат на столе. Видны только числа, написанные сверху. Вася может выбрать несколько карточек. Затем он переворачивает все выбранные карточки и складывает все 50 чисел, которые окажутся после этого видны. Каково наибольшее S, для которого Вася может наверняка получить сумму, не меньшую S? (11)

С.Берлов

22. В связном графе 500 вершин, степень каждой вершины не превосходит 3. Назовем раскраску вершин в черный и белый цвета *интересной*, если белым цветом окрашено более половины вершин, но никакие две белые вершины не соединены ребром. Докажите, что можно выбрать несколько вершин так, чтобы в любой интересной раскраске больше половины из них были окрашены в черный цвет. (11)

Д.Карпов

Публикацию подготовили К.Кохась, В.Сендеров, А.Спивак