

Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Институт естественных наук
и экологии при
«Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

1. Для всех возможных значений параметров a и b решите уравнение

$$\sqrt{\log_a(ax) + \log_x(ax)} + \sqrt{\log_a(x/a) + \log_x(a/x)} = b.$$

2. Определите значения α , удовлетворяющие неравенству

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + p \cos^2 \alpha \geq 1$$

для всех значений $p \in \mathbf{R}$.

3. На координатной плоскости заданы прямые $y = 6x + 7$ и $y = -8x - 14$. Каждая из двух парабол вида $y = \pm x^2 + ax + b$ касается обеих этих прямых. Определите уравнения этих парабол. Найдите площадь S фигуры, границей которой являются указанные выше прямые и параболы.

4. Определите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$x + y - |x - y|$$

при условии, что $x^2 - xy + y^2 = 4$. При каких x и y достигаются эти значения?

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p , и $MN/ML = 2$, $MN/KL = 8$.

6. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите радиус шара.

7. Не пользуясь калькулятором, определите значение выражения

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

1. Два одинаковых клина с массами M и углами раствора α помещены в угол, образованный гладкими полом и

стенкой, как показано на рисунке 1. Коэффициент трения между соприка-

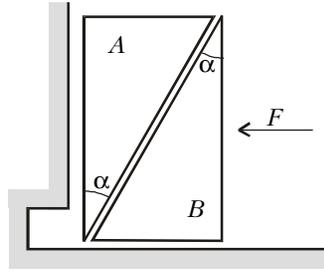


Рис. 1

сающимися плоскостями клиньев μ . 1) Каким должен быть этот коэффициент, чтобы клин A мог быть выдвинут вверх горизонтальной силой F , приложенной к клину B ? 2) Какой должна быть эта сила при заданном μ ? В стене вблизи пола сделана выемка для того, чтобы клин B мог быть продвинут в горизонтальном направлении.

2. Идеальный газ состоит из молекул азота, часть из которых диссоциирована на атомы. В процессе изобарического нагрева абсолютная температура этого газа возрастает от T_1 до T_2 , при этом газ совершает работу A . Какое количество теплоты было подведено к газу, если известно, что степень диссоциации газа (доля диссоциированных молекул) возрастает от α_1 до α_2 , а энергия диссоциации одной молекулы равна ϵ ? Число степеней свободы молекулы азота (с учетом колебаний) считать равным 7.

3. Тонкая трубка квадратной формы, заполненная жидкостью ровно наполовину, может свободно вращать-

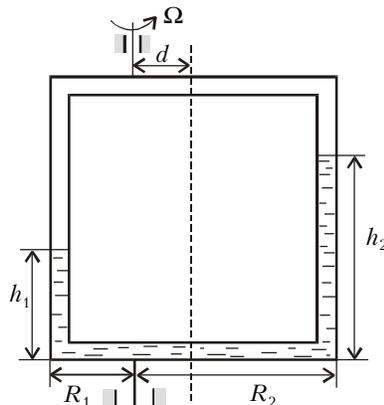


Рис. 2

ся вокруг вертикальной оси, смещенной на некоторое расстояние относительно оси симметрии (рис.2). При вращении рамки с частотой Ω высоты столбов жидкости различаются в два раза. 1) Во сколько раз нужно увеличить частоту вращения, чтобы жидкость заполнила дальнее колено полностью? 2) Во сколько раз нужно увеличить смещение оси, чтобы заполнить то же условие без изменения частоты вращения рамки?

4. В однородном магнитном поле с индукцией B находятся длинные вертикальные проводящие рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля. По рейкам, расстояние между которыми l , может скользить без трения проводник массой m (рис.3). Верхние концы реек замкнуты на катушку индуктивнос-

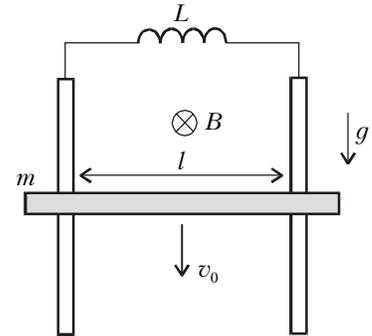


Рис. 3

тью L , а нижние концы разомкнуты. 1) Определите расстояние, на которое переместится первоначально покоящийся проводник, если его мгновенно разогнать вниз до скорости v_0 . 2) Найдите максимальную скорость проводника и ток в катушке в этот момент. Сопротивление проводников и самоиндукцию цепи не учитывать.

5. Точечный источник света S распо-

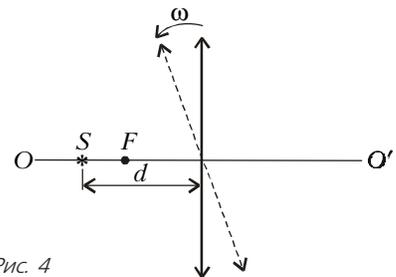


Рис. 4