Сюрпризы таблицы умножения

Впервые таблица Пифагора примерно в таком виде, в каком мы ее находим на обложках тетрадей, появилась в сочинении неопифагорейца Никомаха Геразского (I–II вв.). В его «Введении в арифметику» таблица выполнена в ионийской нумерации. По словам Никомаха, эта таблица восходит «к самому Пифагору».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.1. Таблица Пифагора

Более древние таблицы умножения обнаружены в месопотамских глиняных табличках – их «возраст» около 5 тысяч лет.

Таблица умножения скрывает в себе множество замечательных математических закономерностей, поиск которых может превратиться в увлекательное занятие, сулящее немало сюрпризов.

Назовем *квартетом* четыре числа таблицы Пифагора, расположенных в вершинах некоторого квадрата. Оказывается, что если стороны этого квадрата параллельны диагоналям таблицы Пифагора, то суммы диагональных чисел квартета равны (рис.2). Если стороны квадрата параллельны сторонам таблицы, то равны произведения диагональных чисел квартета. Если при этом квадрат расположен симметрично главной диагонали таблицы Пифагора, то сумма всех чисел квартета – квадрат некоторого натурального числа, и это свойство является хорошей иллюстрацией тождества: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Доказательства этих свойств просты и основаны на определении таблицы Пифагора, а именно: каждое число таблицы равно произведению номера строки и номера столбца, на пересечении которых оно стоит.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$6 + 18 = 4 + 20,\quad 6\cdot 30 = 12\cdot 15,$$
$$7^2 + 2\cdot 7\cdot 9 + 9^2 = 256$$

Рис.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$20=(9+12+24+35):4$$

Рис.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$S_1=12\cdot 13=156,\ S_2=7{,}5\cdot 6{,}5\cdot 12=585$$

Рис.4

Если центром квартета тоже является число таблицы Пифагора, то оно равно среднему арифметическому чисел этого квартета (рис.3). И опираясь на это свойство, легко доказать, что сумма всех чисел таблицы Пифагора, расположенных внутри центрально-симметричной фигуры показанного на рисунке 4 вида, равна произведению центрального числа на количество чисел фигуры. При отсутствии центрального числа вместо него берется дробное число, равное произведению гипотетических дробных номера строки и номера столбца.

Скучную, на первый взгляд, задачу вычисления суммы всех чисел таблицы Пифагора можно решить, получив при этом немалое удовольствие: поскольку $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$, то сумма чисел таблицы будет равна

$$1\cdot 45 + 2\cdot 45 + 3\cdot 45 + \ldots + 9\cdot 45 =$$
$$= 45\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) =$$
$$= 45\cdot 45 = 2025.$$

Красиво, не правда ли?

Заметим также, что все числа таблицы Пифагора можно разбить на девять групп по девять чисел в каждой так, что произведения чисел в каждой группе окажутся равными (рис.5). Разбивая числа на группы, нужно соблюдать правило: числа одной группы должны стоять в клетках таблицы так, чтобы установленные на них шахматные ладьи были дружелюбными, т.е. не угрожали друг другу. В этом случае все девять произведений будут равны

$$(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9)^2 = (9!)^2.$$

На рисунке 6 в таблице Пифагора выделены «уголки». Суммы чисел в уголках образуют последо-